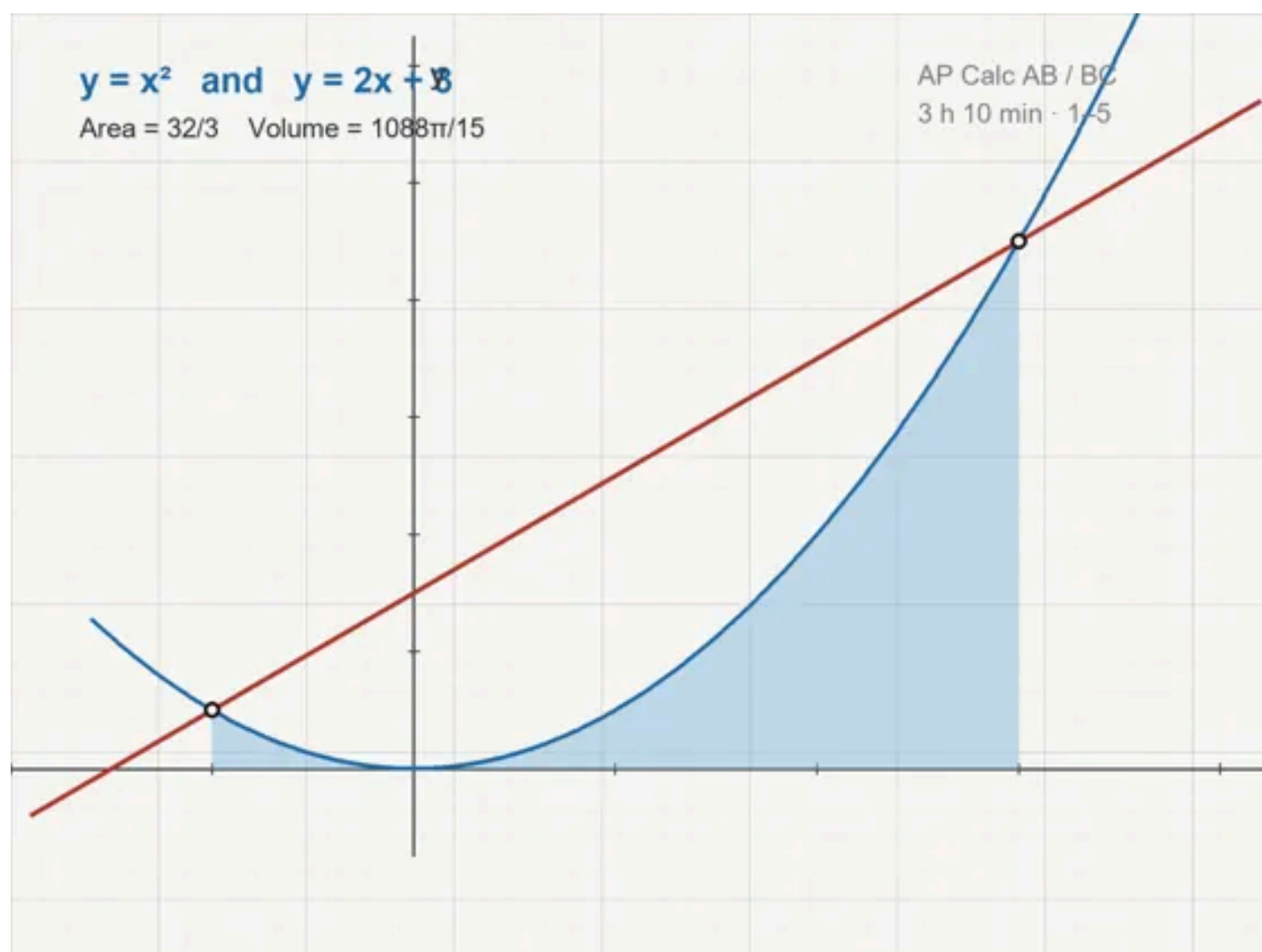


AP Calculus AB/BC 模拟试题（3 小时 10 分、1-5 分制） + 完整详解、评分要点与考制解读

TutorZone (www.tutorzone.com.hk) 原創模擬試題 · 非考評局官方試題

直接答案：AP Calculus 分 AB 与 BC 两卷，结构完全相同：全长 3 小时 10 分，Section I 选择题 42 题／1 小时 40 分／占 50%（Part A 29 题、62 分钟，不可用图形计算机，占 35%；Part B 13 题、38 分钟，须用图形计算机，占 15%），Section II 自由作答 6 题／1 小时 30 分／占 50%（Part A 2 题、30 分钟，须用计算机，占 16.7%；Part B 4 题、60 分钟，不可用计算机，占 33.3%）。考试为混合数位模式：选择题与题目在 Bluebook 应用程序作答，自由作答题手写在纸本答题簿。成绩以 1-5 分报告，不设校本评核；AB 与 BC 同一年不可同时报考。BC 卷覆盖 AB 全部内容，另加参数／极坐标／向量函数、级数、分部积分等课题。



本卷自由作答第 1 题的图形：两曲线在 $x = -1$ 与 $x = 3$ 相交，面积 $32/3$ 、绕 x 轴旋转体体积 $1088\pi/15$ 。

考制速览：AP Calculus AB 与 BC（2027 年 5 月）

部分	题数	时间	计算机	占分
Section I A（选择题）	29 题	62 分钟	不可使用图形计算机	35%
Section I B（选择题）	13 题	38 分钟	须使用图形计算机	15%
Section I 合计——42 题／1 小时 40 分				50%
Section II A（自由作答）	2 题	30 分钟	须使用图形计算机	16.7%
Section II B（自由作答）	4 题	60 分钟	不可使用计算机	33.3%
Section II 合计——6 题／1 小时 30 分				50%

考试总时长 **3 小时 10 分**；选择题与自由作答题的题目在 Bluebook 测试应用程序中呈现，自由作答题则手写在纸本答题簿上，答题簿回收后由官方评分。计算机必须是 AP 认可型号（图形计算机），详见 College Board 的计算机政策。成绩报告为 **1-5 分**，没有校本评核或课程作业。

四条要记住的规则：① **AB 与 BC 同一年不可同时报考**（同一考生一年只可考其中一卷）；② 两卷的卷制、时间与占分**完全一样**，分别在于课题范围；③ Section I Part A 与 Section II Part B 是**不可使用计算机**的部分，占全卷 68.3%（35% + 33.3%），手算能力直接影响成绩；④ 成绩为 1-5 级，不少大学对 Calculus 给予学分或豁免，实际要求以各大学公布为准。

AB 与 BC 的分别与选科策略

项目	AP Calculus AB	AP Calculus BC
卷制、时间、占分	完全相同（见上表）	
课题范围	极限与连续、微分、积分、微分方程（分离变数）、面积与体积	包含 AB 全部内容 ，另加：参数方程、极坐标与向量函数；分部积分、部分分式、瑕积分；欧拉方法与逻辑斯蒂模型；弧长；数列与级数（含泰勒级数）
适合对象	高中一年修完微积分、目标医科／商科／生命科学	已完成 AB 或数学基础较强、目标工程／物理／数学／计算机
难度定位	相等于大学第一学期微积分	相等于大学第一、二学期微积分

选科建议：校内只开一科微积分，而学生打算读工程或物理，直接选 BC；若时间紧迫、或只需要一张 Calculus 成绩用于商科／医科前置要求，AB 的分数通常更容易做高。**切勿**为“考多一张”而在同一年同时报考 AB 与 BC（官方不允许）。

本卷设计与版权说明

本模拟卷由 TutorZone 导师团队依据 College Board 公开的 AP Calculus AB 与 AP Calculus BC 课程与考试说明（含考制、时间、占分与计算机政策）自行编写，**并非 AP 官方试题、样本试卷或过往试题**。AP® 及相关课程文件版

权属 College Board，本卷不转载任何官方试题或课程文件内容。题目、详解与评分要点均为本卷原创，**所有数值答案已逐题核算**。为方便自学，本卷把官方 42 题选择题缩短为 **18 题代表题**（Part A 12 题、Part B 6 题），自由作答题则**完整 6 题**，另加一题 BC 加考题；各题分数分配为本卷自订。

04

Section I 模拟选择题

Part A (12 题，不可使用计算机) ——每题选一个最佳答案，须显示运算过程以便自我检查。

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)/(x - 3)$ 。(1 分)
2. 求 $d/dx [x^3 \ln x]$ 。(1 分)
3. 求 $\int (3x^2 - 2x + 1) dx$ 。(1 分)
4. 已知 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ，求 f 的所有临界点 (critical points) 的 x 值。(1 分)
5. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)/x^2$ 。(1 分)
6. 曲线 $y = \sin 2x$ 在 $x = \pi/6$ 处的切线斜率是多少？(1 分)
7. 求 $\int_0^2 (4 - x^2) dx$ 。(1 分)
8. 求 $f(x) = x^2$ 在区间 $[1, 4]$ 上的平均变化率。(1 分)
9. 把 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (i/n)^2 (1/n)$ 写成定积分并求值。(1 分)
10. 已知 $f''(x) = (x - 2)(x + 1)$ ，求 f 的图像向下凹 (concave down) 的区间。(1 分)
11. 已知 $f(2) = 5$ 且 $f'(2) = 3$ ，求 $(f^{-1})'(5)$ 。(1 分)
12. 曲线 $2x^2 + 3y^2 = 30$ 上点 $(3, 2)$ 处的 dy/dx 是多少？(1 分)

Part B (6 题，可使用图形计算机，数值取 3 位小数或 3 位有效数字)

13. 求 $f(x) = x^3$ 在区间 $[0, 2]$ 上的平均值。(1 分)
14. 求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x$ 所围成区域的面积。(1 分)
15. 质点的速率为 $v(t) = 6t - 4$ (m/s)，已知 $s(1) = 3$ ，求 $s(3)$ 。(1 分)
16. 曲线 $y = \sqrt{x}$ 在 $x = 0$ 至 $x = 4$ 之间绕 x 轴旋转，求旋转体体积。(1 分)
17. 某量以 $y = 100e^{0.05t}$ 增长，求 y 增至 200 所需的 t 。(1 分)
18. 账户余额 $A(t) = 500(1.02)^t$ (元)，求 $A'(10)$ ，即第 10 年时的瞬时增长率。(1 分)

05

Section II 模拟自由作答题 (6 题, 另加 1 题 BC 加考)

Part A (第 1–2 题, 须使用图形计算机)

1. 区域 R 由曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 所围成。
 - (a) 求两者的交点。(3 分)
 - (b) 求 R 的面积。(3 分)
 - (c) R 绕 x 轴旋转, 求旋转体体积 (以 π 表示)。(3 分)
2. 一个球形气球的体积以 $100 \text{ cm}^3/\text{s}$ 的速率增加。
 - (a) 当半径 $r = 5 \text{ cm}$ 时, 求半径的增长率 dr/dt 。(5 分)
 - (b) 此时表面积 $S = 4\pi r^2$ 的增长率 dS/dt 是多少?(4 分)

Part B (第 3–6 题, 不可使用计算机)

3. 已知 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ 。
 - (a) 求 $f'(x)$ 。(2 分)
 - (b) 求所有临界点, 并判定各点为极大或极小。(4 分)
 - (c) 求 f 在 $x = 0$ 处的切线方程。(2 分)
 - (d) 求 f 递减的区间。(1 分)
4. 曲线的方程为 $x^2 + xy + y^2 = 7$ 。
 - (a) 以隐函数微分求 dy/dx 。(4 分)
 - (b) 求点 $(1, 2)$ 处的 dy/dx 。(2 分)
 - (c) 求该点处的切线方程。(2 分)
 - (d) 求曲线上切线为铅直线 (vertical tangent) 的两点。(1 分)
5. 定义 $F(x) = \int_1^x (t^2 - 4) dt$ 。
 - (a) 求 $F'(x)$ 。(2 分)
 - (b) 求 F 的极值点位置并判定性质。(3 分)
 - (c) 求 $F(2)$ 。(2 分)
 - (d) 在 $[1, 5]$ 上, 方程 $F(x) = 0$ 有多少个解? 说明理由。(2 分)
6. (a) 解微分方程 $dy/dx = 2xy$, 已知 $y(0) = 3$ 。(6 分)
(b) 求 $y(0.5)$ 。(3 分)

BC 加考题 (选考, 1 题)

7. (BC) (a) 写出 $f(x) = e^{-x^2}$ 的麦克劳林级数首四项。(4 分)
(b) 用 (a) 的级数估算 $\int_0^{0.5} e^{-x^2} dx$, 取 4 位小数。(3 分)
(c) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n \cdot 3^n)$ 是否收敛, 并说明所用检验法。(2 分)

Section I 答案 (第 1-18 题)

1. 约去分母：原式 $= \lim (x + 3) = 6$ 。
2. 乘积法则： $3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot (1/x) = x^2(3 \ln x + 1)$ 。
3. $x^3 - x^2 + x + C$ (每一项各自积分)。
4. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3) \Rightarrow x = 1$ 或 $x = 3$ 。
5. 用 $1 - \cos x \approx x^2/2$ (或洛必达法则两次) $\Rightarrow$ 极限 $= 1/2$ 。
6. $y' = 2\cos 2x \Rightarrow y'(\pi/6) = 2\cos(\pi/3) = 1$ 。
7. $[4x - x^3/3]_0^2 = 8 - 8/3 = 16/3 \approx 5.333$ 。
8. 平均变化率 $= (f(4) - f(1))/(4 - 1) = (16 - 1)/3 = 5$ 。
9. 黎曼和对应 $\int_0^1 x^2 dx = 1/3$ 。
10. $f'' < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$ 。
11. $(f^{-1})'(5) = 1/f'(2) = 1/3$ 。
12. 隐函数微分： $4x + 6y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -2x/(3y) \Rightarrow$ 在 $(3, 2)$ 得 -1 。
13. 平均值 $= (1/(2 - 0)) \int_0^2 x^3 dx = (1/2)(4) = 2$ 。
14. 交点 $x = 0, 2$ ；面积 $= \int_0^2 (2x - x^2) dx = 4 - 8/3 = 4/3 \approx 1.333$ 。
15. $s(3) = 3 + \int_1^3 (6t - 4) dt = 3 + [3t^2 - 4t]_1^3 = 3 + (15 - 1) = 19$ 。
16. $V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi [x^2/2]_0^4 = 8\pi \approx 25.133$ 。
17. $100e^{0.05t} = 200 \Rightarrow t = \ln 2 / 0.05 =$ 约 **13.863**。
18. $A'(t) = 500(1.02)^t \ln 1.02 \Rightarrow A'(10) =$ 约 **12.070** (元/年)。

Section II 答案与评分要点（第 1-7 题）

1. (a) 3 分： $x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$ 与 $x = 3$ （交点 $(-1, 1)$ 与 $(3, 9)$ ）。(b) 3 分：面积 $= \int_{-1}^3 (2x + 3 - x^2) dx = [x^2 + 3x - x^3/3]_{-1}^3 = 9 - (-5/3) = 32/3 \approx 10.667$ 。(c) 3 分： $V = \pi \int_{-1}^3 [(2x + 3)^2 - (x^2)^2] dx = \pi(364/3 - 244/5) = 1088\pi/15 \approx 227.87$ 。必须写出 $V = \pi \int (\text{外半径}^2 - \text{内半径}^2) dx$ 才给方法分。
2. (a) 5 分： $V = (4/3)\pi r^3 \Rightarrow dV/dt = 4\pi r^2 \cdot (dr/dt)$ （3 分）； $100 = 4\pi(25)(dr/dt) \Rightarrow dr/dt = 1/\pi \approx 0.318 \text{ cm/s}$ （2 分）。(b) 4 分： $S = 4\pi r^2 \Rightarrow dS/dt = 8\pi r \cdot (dr/dt)$ （2 分） $= 8\pi(5)(1/\pi) = 40 \text{ cm}^2/\text{s}$ （2 分）。
3. (a) 2 分： $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ 。(b) 4 分： $6x^2 - 6x - 12 = 0 \Rightarrow 6(x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2$ 或 -1 （2 分）； $f''(x) = 12x - 6$ ： $x = -1$ 时 $f'' = -18 < 0 \Rightarrow (-1, 11)$ 为极大点； $x = 2$ 时 $f'' = 18 > 0 \Rightarrow (2, -16)$ 为极小点（2 分）。(c) 2 分： $f(0) = 4$ 、 $f'(0) = -12 \Rightarrow$ 切线 $y = -12x + 4$ 。(d) 1 分： $f' < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$ 为递减区间。
4. (a) 4 分： $2x + y + xy' + 2yy' = 0$ （3 分） $\Rightarrow y' = -(2x + y)/(x + 2y)$ （1 分）。(b) 2 分：代入 $(1, 2)$ ： $-(2 + 2)/(1 + 4) = -4/5$ 。(c) 2 分： $y - 2 = -(4/5)(x - 1) \Rightarrow y = -(4/5)x + 14/5$ 。(d) 1 分：铅直切线须 $x + 2y = 0$ ，代入原式得 $3y^2 = 7 \Rightarrow y = \pm\sqrt{7/3}$ ，两点为 $(-2\sqrt{7/3}, \sqrt{7/3})$ 与 $(2\sqrt{7/3}, -\sqrt{7/3})$ （约 $(-3.055, 1.528)$ 与 $(3.055, -1.528)$ ）。
5. (a) 2 分：微积分基本定理 $\Rightarrow F'(x) = x^2 - 4$ 。(b) 3 分： $F' = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ ； $x = -2$ 为极大（ F' 由正转负）、 $x = 2$ 为极小（由负转正）。（注意 -2 不在本题 $[1, 5]$ 的讨论范围内。）(c) 2 分： $F(2) = [t^3/3 - 4t]_1^2 = (8/3 - 8) - (1/3 - 4) = -5/3 \approx -1.667$ 。(d) 2 分：2 个解—— $x = 1$ 时 $F = 0$ ； F 在 $(1, 2)$ 上由 0 降至 $-5/3$ 后回升，而 $F(5) = [t^3/3 - 4t]_1^5 = 76/3 > 0$ ，故在 $(2, 5)$ 内另有一解。
6. (a) 6 分：分离变数 $dy/y = 2x dx$ （2 分）； $\ln|y| = x^2 + C$ （2 分）； $y = 3e^{x^2}$ （代入 $y(0) = 3$ 求 C ，2 分）。(b) 3 分： $y(0.5) = 3e^{0.25} \approx 3.852$ 。
7. (BC) (a) 4 分： $e^u = 1 + u + u^2/2 + u^3/6 + \dots$ ，令 $u = -x^2 \Rightarrow 1 - x^2 + x^4/2 - x^6/6$ 。(b) 3 分：逐项积分 $\Rightarrow 0.5 - 0.5^3/3 + 0.5^5/10 - 0.5^7/42 \approx 0.4613$ 。(c) 2 分：收敛——比值检验法： $a_{n+1}/a_n = n/(3(n+1)) \rightarrow 1/3 < 1$ 。另可用与收敛的 $\Sigma 1/3^n$ 作比较检验（ $n \cdot 3^n \geq 3^n$ ）。

课题范围：AB 核心与 BC 加考

课题	AB	BC 额外内容
极限与连续	极限定义、单侧极限、连续性、夹挤定理	洛必达法则处理不定型、瑕积分
微分	定义、幂／乘积／商／链式法则、隐函数微分、相关变化率	参数方程与向量函数的微分、弧长、极坐标曲线面积
微分的应用	均值定理、极值与凹性、优化问题、率相关问题	逻辑斯蒂增长模型、欧拉方法
积分	黎曼和、微积分基本定理、换元法、定积分应用（面积、体积、累积变化量）	分部积分、部分分式、瑕积分、弧长
微分方程	分离变数、斜率场、指数增长与衰减	逻辑斯蒂微分方程、欧拉方法近似解

课题	AB	BC 额外内容
数列与级数	不考	收敛与发散、比值/比较/积分/交错级数检验、泰勒与麦克劳林级数、误差界

09

最常见的失分位

- **忽略“是否可用计算机”**：Section I Part B 与 Section II Part A 才可用图形计算机；用计算机去做不可使用计算机的部分，等于白做。相反，可用计算机的部分要善用表格与图形功能加速。
- **没有写出所用公式或设定**：AP 自由作答题以“评分点”给分，例如体积题必须先写 $V = \pi \int (R^2 - r^2) dx$ ，相关变化率题必须先写 $dV/dt = 4\pi r^2 \cdot dr/dt$ 。只写答案不会得分。
- **未按要求取近似值**：可用计算机的题目通常要求 **3 位小数**；中间步骤过早四舍五入会令未答偏差。不可使用计算机的题目通常要求**准确值**（如 $32/3$ 、 $1088\pi/15$ ）。
- **忽略单位**：cm/s、cm²/s、元/年、平方单位等必须写出；相关变化率题漏单位是常见扣分点。
- **极值判定只用一阶导数**：须以一阶导数变号或二阶导数判定，并明确写出“极大”或“极小”。
- **隐函数微分漏项**：对 y 求导时要乘 y'（例如 xy 的导数是 $y + xy'$ ），漏乘 y' 是最常见的计算失误。
- **把 BC 课题写进 AB 答卷**：级数、极坐标、分部积分属 BC 范围，AB 考生不必准备，也不应浪费时间。

10

12 周备考时间表

周次	内容	操练重点
1-2	极限、连续、导数定义	代数化简求极限；不可使用计算机的极限题
3-4	微分法则、隐函数微分	每日 10 题纯手算求导（含乘积与链式）
5	微分的应用：极值、凹性、均值定理	写齐判定理由（一阶变号或二阶导数）
6	相关变化率与优化问题	先写出关系式，再对时间求导
7-8	黎曼和、微积分基本定理、换元法	把极限形式的和式转成定积分
9	面积与体积、累积变化量	画图定上下限；体积题写 $R^2 - r^2$
10	微分方程与斜率场	分离变数、指数增长模型
11	限时操练：Section I Part A（62 分钟）+Part B（38 分钟）	选择题节奏：不可使用计算机部分约 2 分钟/题
12	限时操练：Section II 全套（1 小时 30 分，2+4 题）	每题约 15 分钟，先写评分点公式再运算
BC 考生加 2 周	级数收敛检验、泰勒级数、参数与极坐标	比值/比较/交错级数检验各 20 题

11

常见问题 FAQ

问：AB 与 BC 可以同年一起考吗？

不可以。官方规定同一考生在同一年度不可同时报考 AP Calculus AB 与 AP Calculus BC；只能选其中一科。

问：BC 是不是“AB 加一科”？

BC 覆盖 AB 的全部课题，再加参数方程、极坐标与向量函数、分部积分与部分分式、瑕积分、欧拉方法、弧长，以及数列与级数（含泰勒级数）。因此 BC 的备考时间通常比 AB 多三分之一左右。

问：考试用什么计算机？

须使用 College Board 认可的图形计算机（4 个功能部分中，2 个部分可用）；不得使用手机、电脑或未经认可的型号。详见官方 AP 计算机政策。

问：Free Response 是打字还是手写？

自由作答题的题目在 Bluebook 应用程序中显示，但答案**手写**在纸本答题簿上，答题簿回收后由官方评分。

问：成绩怎样算？

选择题与自由作答题各占 50%，经统计程序合成后以 **1-5** 报告（5 为最佳）。各大学的学分或豁免政策不同，须以个别大学公布为准。

问：这份模拟卷与官方试题有何分别？

本卷是依官方公开考制与课题自行编写的原创练习题，选择题为代表题（官方 42 题中抽取 18 题形态），自由作答题共 6 题加 1 题 BC 加考题。建议配合官方历年 Free Response 题目与评分指引一同使用。

官方资源对照表

资源	用途
AP Calculus AB (College Board 官方课程页)	考制、题数、时间、占分与考试日期
AP Calculus BC (College Board 官方课程页)	BC 加考课题与卷制
AP Central : Calculus AB 考试说明	各部分题数、时间与计算机规则（官方原文）
AP Central : Calculus BC 考试说明	BC 各部分题数、时间与计算机规则（官方原文）

延伸阅读：[A Level 数学 9709 Paper 1 模拟试题](#)、[IB 数学 AA SL 模拟试题](#)、[IGCSE 数学 0580 模拟试题](#)、[备考练习题总览](#)。想安排 AP Calculus 补习，可先看 [学科的解释](#)，再配对合适导师。