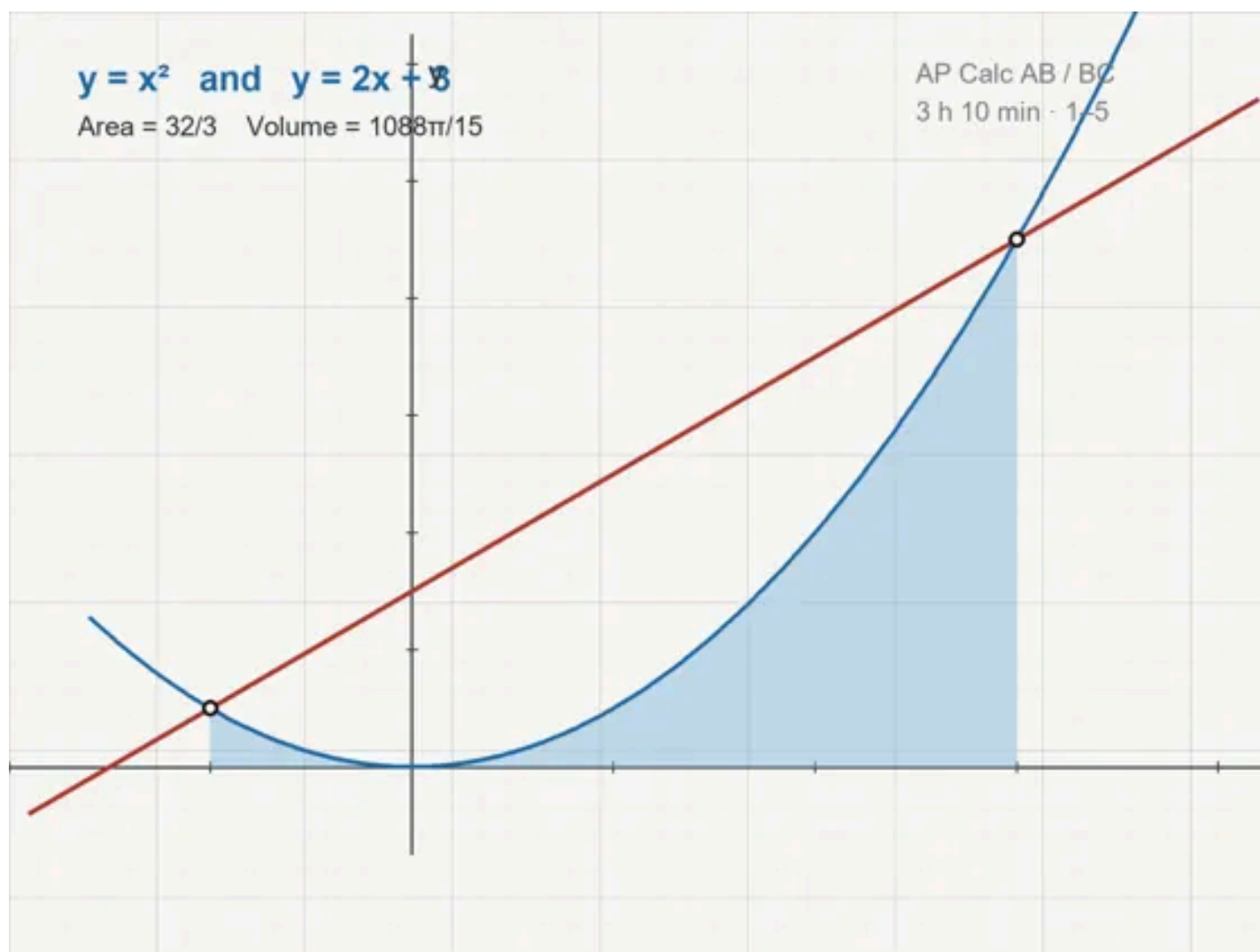


AP Calculus AB/BC 模擬試題（3 小時 10 分、1-5 分制） + 完整詳解、評分要點與考制解讀

TutorZone (www.tutorzone.com.hk) 原創模擬試題 · 非考評局官方試題

直接答案：AP Calculus 分 **AB** 與 **BC** 兩卷，結構完全相同：全長 **3 小時 10 分**，**Section I 選擇題 42 題／1 小時 40 分／佔 50%**（Part A 29 題、62 分鐘，**不可用圖形計算機**，佔 35%；Part B 13 題、38 分鐘，**須用圖形計算機**，佔 15%），**Section II 自由作答 6 題／1 小時 30 分／佔 50%**（Part A 2 題、30 分鐘，**須用計算機**，佔 16.7%；Part B 4 題、60 分鐘，**不可用計算機**，佔 33.3%）。考試為混合數位模式：選擇題與題目在 Bluebook 應用程式作答，自由作答題手寫在紙本答題簿。成績以 **1-5 分** 報告，不設校本評核；**AB 與 BC 同一年不可同時報考**。BC 卷覆蓋 AB 全部內容，另加參數／極坐標／向量函數、級數、分部積分等課題。



本卷自由作答第 1 題的圖形：兩曲線在 $x = -1$ 與 $x = 3$ 相交，面積 $32/3$ 、繞 x 軸旋轉體體積 $1088\pi/15$ 。

考制速覽：AP Calculus AB 與 BC（2027 年 5 月）

部分	題數	時間	計算機	佔分
Section I A（選擇題）	29 題	62 分鐘	不可使用圖形計算機	35%
Section I B（選擇題）	13 題	38 分鐘	須使用圖形計算機	15%
Section I 合計——42 題／1 小時 40 分				50%
Section II A（自由作答）	2 題	30 分鐘	須使用圖形計算機	16.7%
Section II B（自由作答）	4 題	60 分鐘	不可使用計算機	33.3%
Section II 合計——6 題／1 小時 30 分				50%

考試總時長 **3 小時 10 分**；選擇題與自由作答題的**題目**在 Bluebook 測試應用程式中呈現，自由作答題則**手寫**在紙本答題簿上，答題簿回收後由官方評分。計算機必須是 AP 認可型號（圖形計算機），詳見 College Board 的計算機政策。成績報告為 **1-5 分**，**沒有校本評核或課程作業**。

四條要記住的規則：① **AB 與 BC 同一年不可同時報考**（同一考生一年只可考其中一卷）；② 兩卷的卷制、時間與佔分**完全一樣**，分別在於課題範圍；③ Section I Part A 與 Section II Part B 是**不可使用計算機**的部分，佔全卷 68.3%（35% + 33.3%），手算能力直接影響成績；④ 成績為 1-5 級，不少大學對 Calculus 給予學分或豁免，實際要求以各大學公布為準。

02

AB 與 BC 的分別與選科策略

項目	AP Calculus AB	AP Calculus BC
卷制、時間、佔分	完全相同（見上表）	
課題範圍	極限與連續、微分、積分、微分方程（分離變數）、面積與體積	包含 AB 全部內容 ，另加：參數方程、極坐標與向量函數；分部積分、部分分式、瑕積分；歐拉方法與邏輯斯蒂模型；弧長；數列與級數（含泰勒級數）
適合對象	高中一年修完微積分、目標醫科／商科／生命科學	已完成 AB 或數學基礎較強、目標工程／物理／數學／計算機
難度定位	相等於大學第一學期微積分	相等於大學第一、二學期微積分

選科建議：校內只開一科微積分，而學生打算讀工程或物理，直接選 BC；若時間緊迫、或只需要一張 Calculus 成績用於商科／醫科前置要求，AB 的分數通常更容易做高。**切勿為「考多一張」而在同一年同時報考 AB 與 BC（官方不允許）。**

03

本卷設計與版權說明

本模擬卷由 TutorZone 導師團隊依據 College Board 公開的 AP Calculus AB 與 AP Calculus BC 課程與考試說明（含考制、時間、佔分與計算機政策）自行編寫，**並非 AP 官方試題、樣本試卷或過往試題**。AP® 及相關課程文件版

權屬 College Board，本卷不轉載任何官方試題或課程文件內容。題目、詳解與評分要點均為本卷原創，**所有數值答案已逐題核算**。為方便自學，本卷把官方 42 題選擇題縮短為 **18 題代表題**（Part A 12 題、Part B 6 題），自由作答題則**完整 6 題**，另加一題 BC 加考題；各題分數分配為本卷自訂。

04

Section I 模擬選擇題

Part A (12 題，不可使用計算機) —— 每題選一個最佳答案，須顯示運算過程以便自我檢查。

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)/(x - 3)$ 。(1 分)
2. 求 $d/dx [x^3 \ln x]$ 。(1 分)
3. 求 $\int (3x^2 - 2x + 1) dx$ 。(1 分)
4. 已知 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ，求 f 的所有臨界點 (critical points) 的 x 值。(1 分)
5. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)/x^2$ 。(1 分)
6. 曲線 $y = \sin 2x$ 在 $x = \pi/6$ 處的切線斜率是多少？(1 分)
7. 求 $\int_0^2 (4 - x^2) dx$ 。(1 分)
8. 求 $f(x) = x^2$ 在區間 $[1, 4]$ 上的平均變化率。(1 分)
9. 把 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (i/n)^2 (1/n)$ 寫成定積分並求值。(1 分)
10. 已知 $f''(x) = (x - 2)(x + 1)$ ，求 f 的圖像向下凹 (concave down) 的區間。(1 分)
11. 已知 $f(2) = 5$ 且 $f'(2) = 3$ ，求 $(f^{-1})'(5)$ 。(1 分)
12. 曲線 $2x^2 + 3y^2 = 30$ 上點 $(3, 2)$ 處的 dy/dx 是多少？(1 分)

Part B (6 題，可使用圖形計算機，數值取 3 位小數或 3 位有效數字)

13. 求 $f(x) = x^3$ 在區間 $[0, 2]$ 上的平均值。(1 分)
14. 求曲線 $y = x^2$ 與直線 $y = 2x$ 所圍成區域的面積。(1 分)
15. 質點的速率為 $v(t) = 6t - 4$ (m/s)，已知 $s(1) = 3$ ，求 $s(3)$ 。(1 分)
16. 曲線 $y = \sqrt{x}$ 在 $x = 0$ 至 $x = 4$ 之間繞 x 軸旋轉，求旋轉體體積。(1 分)
17. 某量以 $y = 100e^{0.05t}$ 增長，求 y 增至 200 所需的 t 。(1 分)
18. 帳戶餘額 $A(t) = 500(1.02)^t$ (元)，求 $A'(10)$ ，即第 10 年時的瞬時增長率。(1 分)

05

Section II 模擬自由作答題 (6 題，另加 1 題 BC 加考)

Part A (第 1–2 題，須使用圖形計算機)

1. 區域 R 由曲線 $y = x^2$ 與直線 $y = 2x + 3$ 所圍成。
 - (a) 求兩者的交點。(3 分)
 - (b) 求 R 的面積。(3 分)
 - (c) R 繞 x 軸旋轉，求旋轉體體積 (以 π 表示)。(3 分)
2. 一個球形氣球的體積以 $100 \text{ cm}^3/\text{s}$ 的速率增加。
 - (a) 當半徑 $r = 5 \text{ cm}$ 時，求半徑的增長率 dr/dt 。(5 分)
 - (b) 此時表面積 $S = 4\pi r^2$ 的增長率 dS/dt 是多少？(4 分)

Part B (第 3–6 題，不可使用計算機)

3. 已知 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ 。
 - (a) 求 $f'(x)$ 。(2 分)
 - (b) 求所有臨界點，並判定各點為極大或極小。(4 分)
 - (c) 求 f 在 $x = 0$ 處的切線方程。(2 分)
 - (d) 求 f 遞減的區間。(1 分)
4. 曲線的方程為 $x^2 + xy + y^2 = 7$ 。
 - (a) 以隱函數微分求 dy/dx 。(4 分)
 - (b) 求點 $(1, 2)$ 處的 dy/dx 。(2 分)
 - (c) 求該點處的切線方程。(2 分)
 - (d) 求曲線上切線為鉛直線 (vertical tangent) 的兩點。(1 分)
5. 定義 $F(x) = \int_1^x (t^2 - 4) dt$ 。
 - (a) 求 $F'(x)$ 。(2 分)
 - (b) 求 F 的極值點位置並判定性質。(3 分)
 - (c) 求 $F(2)$ 。(2 分)
 - (d) 在 $[1, 5]$ 上，方程 $F(x) = 0$ 有多少個解？說明理由。(2 分)
6. (a) 解微分方程 $dy/dx = 2xy$ ，已知 $y(0) = 3$ 。(6 分)
(b) 求 $y(0.5)$ 。(3 分)

BC 加考題 (選考，1 題)

7. (BC) (a) 寫出 $f(x) = e^{-x^2}$ 的麥克勞林級數首四項。(4 分)
(b) 用 (a) 的級數估算 $\int_0^{0.5} e^{-x^2} dx$ ，取 4 位小數。(3 分)
(c) 判斷級數 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n \cdot 3^n)$ 是否收斂，並說明所用檢驗法。(2 分)

Section I 答案 (第 1–18 題)

1. 約去分母：原式 $= \lim (x + 3) = 6$ 。
2. 乘積法則： $3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot (1/x) = x^2(3 \ln x + 1)$ 。
3. $x^3 - x^2 + x + C$ (每一項各自積分)。
4. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3) \Rightarrow x = 1$ 或 $x = 3$ 。
5. 用 $1 - \cos x \approx x^2/2$ (或洛必達法則兩次) $\Rightarrow$ 極限 $= 1/2$ 。
6. $y' = 2\cos 2x \Rightarrow y'(\pi/6) = 2\cos(\pi/3) = 1$ 。
7. $[4x - x^3/3]_0^2 = 8 - 8/3 = 16/3 \approx 5.333$ 。
8. 平均變化率 $= (f(4) - f(1))/(4 - 1) = (16 - 1)/3 = 5$ 。
9. 黎曼和對應 $\int_0^1 x^2 dx = 1/3$ 。
10. $f'' < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$ 。
11. $(f^{-1})'(5) = 1/f'(2) = 1/3$ 。
12. 隱函數微分： $4x + 6y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -2x/(3y) \Rightarrow$ 在 $(3, 2)$ 得 -1 。
13. 平均值 $= (1/(2 - 0)) \int_0^2 x^3 dx = (1/2)(4) = 2$ 。
14. 交點 $x = 0, 2$ ；面積 $= \int_0^2 (2x - x^2) dx = 4 - 8/3 = 4/3 \approx 1.333$ 。
15. $s(3) = 3 + \int_1^3 (6t - 4) dt = 3 + [3t^2 - 4t]_1^3 = 3 + (15 - 1) = 19$ 。
16. $V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi[x^2/2]_0^4 = 8\pi \approx 25.133$ 。
17. $100e^{0.05t} = 200 \Rightarrow t = \ln 2 / 0.05 = \text{約 } 13.863$ 。
18. $A'(t) = 500(1.02)^t \ln 1.02 \Rightarrow A'(10) = \text{約 } 12.070$ (元／年)。

Section II 答案與評分要點（第 1-7 題）

- 1. (a) 3 分：** $x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$ 與 $x = 3$ （交點 $(-1, 1)$ 與 $(3, 9)$ ）。**(b) 3 分：**面積 $= \int_{-1}^3 (2x + 3 - x^2) dx = [x^2 + 3x - x^3/3]_{-1}^3 = 9 - (-5/3) = 32/3 \approx 10.667$ 。**(c) 3 分：** $V = \pi \int_{-1}^3 [(2x + 3)^2 - (x^2)^2] dx = \pi(364/3 - 244/5) = 1088\pi/15 \approx 227.87$ 。必須寫出 $V = \pi \int (\text{外半徑}^2 - \text{內半徑}^2) dx$ 才給方法分。
- 2. (a) 5 分：** $V = (4/3)\pi r^3 \Rightarrow dV/dt = 4\pi r^2 \cdot (dr/dt)$ （3 分）； $100 = 4\pi(25)(dr/dt) \Rightarrow dr/dt = 1/\pi \approx 0.318 \text{ cm/s}$ （2 分）。**(b) 4 分：** $S = 4\pi r^2 \Rightarrow dS/dt = 8\pi r \cdot (dr/dt)$ （2 分） $= 8\pi(5)(1/\pi) = 40 \text{ cm}^2/\text{s}$ （2 分）。
- 3. (a) 2 分：** $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ 。**(b) 4 分：** $6x^2 - 6x - 12 = 0 \Rightarrow 6(x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2$ 或 -1 （2 分）； $f''(x) = 12x - 6$ ： $x = -1$ 時 $f'' = -18 < 0 \Rightarrow (-1, 11)$ 為極大點； $x = 2$ 時 $f'' = 18 > 0 \Rightarrow (2, -16)$ 為極小點（2 分）。**(c) 2 分：** $f(0) = 4$ 、 $f'(0) = -12 \Rightarrow$ 切線 $y = -12x + 4$ 。**(d) 1 分：** $f' < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$ 為遞減區間。
- 4. (a) 4 分：** $2x + y + xy' + 2yy' = 0$ （3 分） $\Rightarrow y' = -(2x + y)/(x + 2y)$ （1 分）。**(b) 2 分：**代入 $(1, 2)$ ： $-(2 + 2)/(1 + 4) = -4/5$ 。**(c) 2 分：** $y - 2 = -(4/5)(x - 1) \Rightarrow y = -(4/5)x + 14/5$ 。**(d) 1 分：**鉛直切線須 $x + 2y = 0$ ，代入原式得 $3y^2 = 7 \Rightarrow y = \pm\sqrt{7/3}$ ，兩點為 $(-2\sqrt{7/3}, \sqrt{7/3})$ 與 $(2\sqrt{7/3}, -\sqrt{7/3})$ （約 $(-3.055, 1.528)$ 與 $(3.055, -1.528)$ ）。
- 5. (a) 2 分：**微積分基本定理 $\Rightarrow F'(x) = x^2 - 4$ 。**(b) 3 分：** $F' = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ ； $x = -2$ 為極大（ F' 由正轉負）、 $x = 2$ 為極小（由負轉正）。（注意 -2 不在本題 $[1, 5]$ 的討論範圍內。）**(c) 2 分：** $F(2) = [t^3/3 - 4t]_1^2 = (8/3 - 8) - (1/3 - 4) = -5/3 \approx -1.667$ 。**(d) 2 分：**2 個解—— $x = 1$ 時 $F = 0$ ； F 在 $(1, 2)$ 上由 0 降至 $-5/3$ 後回升，而 $F(5) = [t^3/3 - 4t]_1^5 = 76/3 > 0$ ，故在 $(2, 5)$ 內另有一解。
- 6. (a) 6 分：**分離變數 $dy/y = 2x dx$ （2 分）； $\ln|y| = x^2 + C$ （2 分）； $y = 3e^{x^2}$ （代入 $y(0) = 3$ 求 C ，2 分）。**(b) 3 分：** $y(0.5) = 3e^{0.25} \approx 3.852$ 。
- 7. (BC) (a) 4 分：** $e^u = 1 + u + u^2/2 + u^3/6 + \dots$ ，令 $u = -x^2 \Rightarrow 1 - x^2 + x^4/2 - x^6/6$ 。**(b) 3 分：**逐項積分 $\Rightarrow 0.5 - 0.5^3/3 + 0.5^5/10 - 0.5^7/42 = \text{約 } 0.4613$ 。**(c) 2 分：**收斂——比值檢驗法： $a_{n+1}/a_n = n/(3(n+1)) \rightarrow 1/3 < 1$ 。另可用與收斂的 $\Sigma 1/3^n$ 作比較檢驗（ $n \cdot 3^n \geq 3^n$ ）。

課題範圍：AB 核心與 BC 加考

課題	AB	BC 額外內容
極限與連續	極限定義、單側極限、連續性、夾擠定理	洛必達法則處理不定型、瑕積分
微分	定義、冪／乘積／商／鏈式法則、隱函數微分、相關變化率	參數方程與向量函數的微分、弧長、極坐標曲線面積
微分的應用	均值定理、極值與凹性、優化問題、率相關問題	邏輯斯蒂增長模型、歐拉方法
積分	黎曼和、微積分基本定理、換元法、定積分應用（面積、體積、累積變化量）	分部積分、部分分式、瑕積分、弧長
微分方程	分離變數、斜率場、指數增長與衰減	邏輯斯蒂微分方程、歐拉方法近似解

課題	AB	BC 額外內容
數列與級數	不考	收斂與發散、比值／比較／積分／交錯級數檢驗、泰勒與麥克勞林級數、誤差界

09

最常見的失分位

- **忽略「是否可用計算機」**：Section I Part B 與 Section II Part A 才可用圖形計算機；用計算機去做不可使用計算機的部分，等於白做。相反，可用計算機的部分要善用表格與圖形功能加速。
- **沒有寫出所用公式或設定**：AP 自由作答題以「評分點」給分，例如體積題必須先寫 $V = \pi \int (R^2 - r^2) dx$ ，相關變化率題必須先寫 $dV/dt = 4\pi r^2 \cdot dr/dt$ 。只寫答案不會得分。
- **未按要求取近似值**：可用計算機的題目通常要求 **3 位小數**；中間步驟過早四捨五入會令末答偏差。不可使用計算機的題目通常要求**準確值**（如 $32/3$ 、 $1088\pi/15$ ）。
- **忽略單位**：cm/s、cm²/s、元／年、平方單位等必須寫出；相關變化率題漏單位是常見扣分點。
- **極值判定只用一階導數**：須以一階導數變號或二階導數判定，並明確寫出「極大」或「極小」。
- **隱函數微分漏項**：對 y 求導時要乘 y'（例如 xy 的導數是 $y + xy'$ ），漏乘 y' 是最常見的計算失誤。
- **把 BC 課題寫進 AB 答卷**：級數、極坐標、分部積分屬 BC 範圍，AB 考生不必準備，也不應浪費時間。

10

12 週備考時間表

週次	內容	操練重點
1-2	極限、連續、導數定義	代數化簡求極限；不可使用計算機的極限題
3-4	微分法則、隱函數微分	每日 10 題純手算求導（含乘積與鏈式）
5	微分的應用：極值、凹性、均值定理	寫齊判定理由（一階變號或二階導數）
6	相關變化率與優化問題	先寫出關係式，再對時間求導
7-8	黎曼和、微積分基本定理、換元法	把極限形式的和式轉成定積分
9	面積與體積、累積變化量	畫圖定上下限；體積題寫 $R^2 - r^2$
10	微分方程與斜率場	分離變數、指數增長模型
11	限時操練：Section I Part A（62 分鐘）+ Part B（38 分鐘）	選擇題節奏：不可使用計算機部分約 2 分鐘／題
12	限時操練：Section II 全套（1 小時 30 分，2+4 題）	每題約 15 分鐘，先寫評分點公式再運算
BC 考生加 2 週	級數收斂檢驗、泰勒級數、參數與極坐標	比值／比較／交錯級數檢驗各 20 題

11

常見問題 FAQ

問：AB 與 BC 可以同年一起考嗎？

不可以。官方規定同一考生在同一年度不可同時報考 AP Calculus AB 與 AP Calculus BC；只能選其中一科。

問：BC 是不是「AB 加一科」？

BC 覆蓋 AB 的全部課題，再加參數方程、極坐標與向量函數、分部積分與部分分式、瑕積分、歐拉方法、弧長，以及數列與級數（含泰勒級數）。因此 BC 的備考時間通常比 AB 多三分之一左右。

問：考試用什麼計算機？

須使用 College Board 認可的圖形計算機（4 個功能部分中，2 個部分可用）；不得使用手機、電腦或未經認可的型號。詳見官方 AP 計算機政策。

問：Free Response 是打字還是手寫？

自由作答題的題目在 Bluebook 應用程式中顯示，但答案**手寫**在紙本答題簿上，答題簿回收後由官方評分。

問：成績怎樣算？

選擇題與自由作答題各佔 50%，經統計程序合成後以 **1-5** 報告（5 為最佳）。各大學的學分或豁免政策不同，須以個別大學公布為準。

問：這份模擬卷與官方試題有何分別？

本卷是依官方公開考制與課題自行編寫的原創練習題，選擇題為代表題（官方 42 題中抽取 18 題形態），自由作答題共 6 題加 1 題 BC 加考題。建議配合官方歷年 Free Response 題目與評分指引一同使用。

12

官方資源對照表

資源	用途
AP Calculus AB (College Board 官方課程頁)	考制、題數、時間、佔分與考試日期
AP Calculus BC (College Board 官方課程頁)	BC 加考課題與卷制
AP Central : Calculus AB 考試說明	各部分題數、時間與計算機規則（官方原文）
AP Central : Calculus BC 考試說明	BC 各部分題數、時間與計算機規則（官方原文）

延伸閱讀：[A Level 數學 9709 Paper 1 模擬試題](#)、[IB 數學 AA SL 模擬試題](#)、[IGCSE 數學 0580 模擬試題](#)、[備考練習題總覽](#)。想安排 AP Calculus 補習，可先看 [學科的解釋](#)，再配對合適導師。