

IB 數學 AA SL Paper 1 模擬試卷（1 小時 30 分・80 分・不用計算機） | 答案
與評分要點

年級：IB DP（SL 第一年 / 第二年） | 科目：數學：分析與方法 SL | 時限：90 分鐘 | 總分：80 分
（不用計算機）

卷制與分數分佈

部分	題目	題數	分數	內容
Section A	第 1 – 8 題（短題，每題 5 – 8 分）	8	52	數列、二次函數、對數、三角、微分、二項式、向量、概率
Section B	第 9 – 10 題（長題，每題 14 分）	2	28	邏輯斯蒂模型與微分應用、餘弦定理與三角形解題
全卷總分	全卷 10 題	10	80	以上全部內容

Section A 題目（短題，不用計算機）

第 1 題 等差數列（5 分）

等差數列的第 4 項為 11，首 10 項之和為 155。

(a) 求首項 a 與公差 d 。（3 分）

(b) 求 S_{20} 。（2 分）

第 2 題 二次函數的配方法（6 分）

函數 $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ 。

(a) 把 $f(x)$ 寫成 $a(x - h)^2 + k$ 的形式。（3 分）

(b) 寫出 $y = f(x)$ 圖像的頂點坐標。 (1 分)

(c) 解 $f(x) = 0$ ，答案用根式表示。 (2 分)

第 3 題 對數方程 (6 分)

以下兩題的答案均為準確值。

(a) 解 $\log_3(2x + 1) - \log_3(x - 1) = 2$ 。 (4 分)

(b) 解 $\log_2 x + \log_2(x - 6) = 4$ 。 (2 分)

第 4 題 三角方程 (6 分)

考慮方程 $2 \sin^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0$ ，其中 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。

(a) 把方程分解，並求 $\sin \theta$ 的所有可能值。 (3 分)

(b) 由此求方程在 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 內的所有解，答案以 π 表示。 (3 分)

第 5 題 微分與駐點 (7 分)

函數 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ 。

(a) 求 $f'(x)$ ，並分解為 $f'(x) = 3(x - p)(x - q)$ 的形式。 (2 分)

(b) 求 $y = f(x)$ 所有駐點的坐標。 (3 分)

(c) 判斷這兩個駐點的性質，須說明理由。 (2 分)

第 6 題 二項式定理 (8 分)

在 $(2 + 3x)^5$ 的展開式中。

(a) 求 x^3 項的係數。 (3 分)

(b) 求 x^5 項的係數。 (1 分)

(c) 求 x^2 項的係數。 (2 分)

(d) 由此求展開式所有係數之和。 (2 分)

第 7 題 立體向量 (6 分)

已知向量 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 、 $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ 。

(a) 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 。 (2 分)

(b) 求 $|\mathbf{a}|$ 與 $|\mathbf{b}|$ 的準確值 (根式須化簡)。 (2 分)

(c) 求常數 k ，使得 $\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ 與 $\mathbf{a}$ 互相垂直。 (2 分)

第 8 題 概率 (不放回抽樣) (8 分)

袋中有 5 個紅球與 3 個藍球，共 8 個。隨機抽出 2 個球，不放回。

(a) 求兩個球皆為紅球的概率。 (2 分)

(b) 求兩個球的顏色不同的概率。 (3 分)

(c) 求至少有一個紅球的概率。 (3 分)

Section B 題目 (長題)

第 9 題 (14 分) 邏輯斯蒂生長模型

池塘內魚的數目 N 在 t 個月後以模型 $N(t) = 600 / (1 + 5e^{-0.4t})$ 估計，其中 $t \geq 0$ 。

(a) 求起初 ($t = 0$) 放入池塘的魚數。 (2 分)

(b) 求 t 趨向無限時魚數的極限值，並解釋之。 (2 分)

(c) 求魚數達到 300 條所需的時間，答案以 $\ln$ 表示，並取三位有效數字。 (4 分)

(d) 證明 $N'(t) = 1200e^{-0.4t} / (1 + 5e^{-0.4t})^2$ ，並求 $t = 0$ 時的增長率。 (4 分)

(e) 證明 $N' = N(600 - N) / 1500$ ，並由此解釋為何增長率在魚數為 300 條時最大。 (2 分)

第 10 題 (14 分) 餘弦定理與三角形

在三角形 ABC 中， $AB = 8\text{ cm}$ 、 $AC = 5\text{ cm}$ ，且角 $BAC = 60^\circ$ 。（本題不許用計算機，答案須為準確值。）

(a) 求 BC 的長度。（3 分）

(b) 求三角形 ABC 的面積，答案用根式表示。（3 分）

(c) 求 $\sin(\text{角 } ABC)$ 的準確值，並由此求角 ABC（取一位小數）。（3 分）

(d) 設 M 為 BC 的中點，求中線 AM 的準確長度。（3 分）

(e) 求 A 到 BC 的最短距離。（2 分）

答案與評分要點

第 1 題 (5 分)

(a) 3 分

- M1 寫出 $u_4 = a + 3d = 11$ 及 $S_{10} = 5(2a + 9d) = 155$ 兩式
- M1 由 $a = 11 - 3d$ 代入得 $22 - 6d + 9d = 31$ ，解得 $d = 3$
- A1 $d = 3$ 、 $a = 2$ （兩者須同時正確）

(b) 2 分

- M1 代入 $S_{20} = 10(2 \times 2 + 19 \times 3)$
- A1 610

第 2 題 (6 分)

(a) 3 分

- M1 提出係數： $2(x^2 - 4x) + 3$
- M1 配方： $2[(x - 2)^2 - 4] + 3$
- A1 $f(x) = 2(x - 2)^2 - 5$

(b) 1 分

- A1 $(2, -5)$

(c) 2 分

- M1 由 $2(x - 2)^2 = 5$ 得 $x - 2 = \pm \sqrt{5/2} = \pm \sqrt{10} / 2$
- A1 $x = 2 + \sqrt{10} / 2$ 或 $x = 2 - \sqrt{10} / 2$ (≈ 3.581 、 0.419)

第 3 題 (6 分)

(a) 4 分

- M1 合併為 $\log_3[(2x + 1) / (x - 1)] = 2$
- M1 化為指數式 $(2x + 1) / (x - 1) = 9$
- M1 交叉相乘得 $2x + 1 = 9x - 9$ ，即 $7x = 10$
- A1 $x = 10 / 7$ (≈ 1.43)，且代回 $x - 1 > 0$ 成立

(b) 2 分

- M1 $x(x - 6) = 16$ ，即 $x^2 - 6x - 16 = 0 = (x - 8)(x + 2)$
- A1 $x = 8$ ($x = -2$ 不合定義域，須剔除)

第 4 題 (6 分)

(a) 3 分

- M1 視 $\sin\theta$ 為未知數分解： $(2 \sin\theta + 1)(\sin\theta - 1) = 0$
- A1 $\sin\theta = -1 / 2$
- A1 $\sin\theta = 1$

(b) 3 分

- M1 由 $\sin\theta = 1$ 得 $\theta = \pi / 2$
- M1 由 $\sin\theta = -1 / 2$ 得第三、四象限參考角 $\pi / 6$ ，即 $\theta = \pi + \pi / 6$ 與 $2\pi - \pi / 6$
- A1 $\theta = \pi / 2$ 、 $7\pi / 6$ 、 $11\pi / 6$ (三個解齊全才算)

第 5 題 (7 分)

(a) 2 分

- M1 逐項求導得 $3x^2 - 12x + 9$
- A1 $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$

(b) 3 分

- M1 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 1$ 或 $x = 3$
- A1 $f(1) = 1 - 6 + 9 + 2 = 6$ ，即駐點 $(1, 6)$
- A1 $f(3) = 27 - 54 + 27 + 2 = 2$ ，即駐點 $(3, 2)$

(c) 2 分

- M1 用二階導數 $f''(x) = 6x - 12$ （或一階導數符號表）判別
- A1 $f''(1) = -6 < 0$ 故 $(1, 6)$ 為極大點； $f''(3) = 6 > 0$ 故 $(3, 2)$ 為極小點

第 6 題 (8 分)

(a) 3 分

- M1 用通項 $C(5, r) 2^{5-r} (3x)^r$ ，取 $r = 3$
- M1 計算 $10 \times 2^2 \times 3^3 = 10 \times 4 \times 27$
- A1 1080

(b) 1 分

- A1 $3^5 = 243$

(c) 2 分

- M1 取 $r = 2$: $C(5, 2) 2^3 3^2 = 10 \times 8 \times 9$
- A1 720

(d) 2 分

- M1 令 $x = 1$ ，係數和等於 $(2 + 3)^5$
- A1 $5^5 = 3125$

第 7 題 (6 分)

(a) 2 分

- M1 $3(-1) + (-1)(4) + 2(1)$
- A1 -5

(b) 2 分

- $|\mathbf{a}| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$
- $|\mathbf{b}| = \sqrt{1 + 16 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

(c) 2 分

- M1 垂直條件 $(\mathbf{a} + k\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 + k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 14 - 5k = 0$
- A1 $k = 14 / 5 = 2.8$

第 8 題 (8 分)

(a) 2 分

- M1 $C(5, 2) / C(8, 2) = 10 / 28$
- A1 $5 / 14$

(b) 3 分

- M1 考慮「先紅後藍」與「先藍後紅」兩種次序，共 $5 \times 3 \times 2 = 30$ 個有序結果
- M1 樣本空間有 $8 \times 7 = 56$ 個有序結果，故概率為 $30 / 56$
- A1 $15 / 28$ (≈ 0.536)

(c) 3 分

- M1 用補集： $P(\text{至少一個紅}) = 1 - P(\text{兩個皆藍})$
- M1 $P(\text{兩個皆藍}) = C(3, 2) / C(8, 2) = 3 / 28$
- A1 $25 / 28$ (≈ 0.893)

第 9 題 (14 分)

(a) 2 分

- M1 代入 $t = 0$ ， $e^0 = 1$ ，分母為 $1 + 5 = 6$
- A1 $N(0) = 600 / 6 = 100$ 條

(b) 2 分

- M1 當 $t \rightarrow \infty$ ， $e^{-0.4t} \rightarrow 0$ ，故分母 $\rightarrow 1$
- A1 極限為 600 條，即池塘長期可容納的魚數上限

(c) 4 分

- M1 令 $600 / (1 + 5e^{-0.4t}) = 300$ ，得 $1 + 5e^{-0.4t} = 2$
- M1 化簡為 $e^{-0.4t} = 1 / 5$
- M1 兩邊取自然對數： $-0.4t = -\ln 5$ ，故 $t = \ln 5 / 0.4 = 2.5 \ln 5$
- A1 $t = 2.5 \ln 5 \approx 4.02$ 個月（三位有效數字）

(d) 4 分

- M1 寫成 $N = 600(1 + 5e^{-0.4t})^{-1}$ ，用鏈式法則
- M1 內層導數為 $5 \times (-0.4)e^{-0.4t} = -2e^{-0.4t}$ ，故 $N' = -600(1 + 5e^{-0.4t})^{-2} \times (-2e^{-0.4t})$
- R1 化簡得 $N'(t) = 1200e^{-0.4t} / (1 + 5e^{-0.4t})^2$ ，與題目一致
- A1 $N'(0) = 1200 / 36 = 100 / 3 \approx 33.3$ 條 / 月

(e) 2 分

- R1 由 $N = 600 / (1 + 5e^{-0.4t})$ 得 $e^{-0.4t} = (600 - N) / (5N)$ ，代入 N' 化簡得 $N' = N(600 - N) / 1500$
- R1 這是 N 的二次函數，圖像為開口向下的拋物線，頂點在 $N = 300$ （即 $t = 2.5 \ln 5 \approx 4.02$ ），此時 $N' = 300 \times 300 / 1500 = 60$ 條 / 月最大

第 10 題 (14 分)

(a) 3 分

- M1 用餘弦定理 $BC^2 = 8^2 + 5^2 - 2(8)(5)\cos 60^\circ$
- M1 $\cos 60^\circ = 1/2$ ，故 $BC^2 = 64 + 25 - 40 = 49$
- A1 $BC = 7$ cm

(b) 3 分

- M1 面積 $= (1/2)(8)(5)\sin 60^\circ$
- M1 $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ ，故面積 $= 20 \times \sqrt{3}/2$
- A1 $10\sqrt{3}$ cm² (≈ 17.3 cm²)

(c) 3 分

- M1 用正弦定理 $\sin B / 5 = \sin 60^\circ / 7$
- A1 $\sin B = 5\sqrt{3}/14$ (≈ 0.6186)
- A1 角 $ABC \approx 38.2^\circ$ (因 B 為銳角，取 38.2° 而非 141.8°)

(d) 3 分

- M1 用中線公式 $AM^2 = (2AB^2 + 2AC^2 - BC^2) / 4$
- M1 代入得 $(2 \times 64 + 2 \times 25 - 49) / 4 = 129 / 4$
- A1 $AM = \sqrt{129} / 2$ cm (≈ 5.68 cm)

(e) 2 分

- M1 最短距離 h 滿足 $(1/2)(BC)h = \text{面積}$ ，故 $h = 2 \times 10\sqrt{3} / 7$
- A1 $20\sqrt{3} / 7$ cm (≈ 4.95 cm)

等級參考 (本卷 80 分，本卷自訂)

7 68 – 80 分

全題型掌握，方法與準確值均無誤，推理完整。

6 59 – 67 分

大部分題目正確，僅在根式化簡或單位上失分。

5 50 – 58 分

短題穩定，長題的建模或證明部分有缺漏。

4 39 – 49 分

基本運算可行，但配方法、對數或三角方程有明顯錯誤。

3 28 – 38 分

只完成部分短題，長題未能建立方法。

1 – 2 0 – 27 分

須重溫課本題型，並練習不依賴計算機的運算。

時間分配建議（全卷 90 分鐘）

10 分鐘 Section A 第 1 – 3 題（數列、二次函數、對數）

15 分鐘 Section A 第 4 – 5 題（三角方程、微分）

15 分鐘 Section A 第 6 – 8 題（二項式、向量、概率）

12 分鐘 Section B 第 9 題（邏輯斯蒂模型）

12 分鐘 Section B 第 10 題（餘弦定理與三角形）

26 分鐘 覆核：每題的準確值與單位，特別是根式化簡

注意事項

- 全卷 90 分鐘，總分 80 分；Section A 為短題，Section B 為長題。
- 不許使用計算機（Paper 1 為 no-calculator paper），答案須以準確值表示：分數、已化簡的根式、 π 的倍數或自然對數。
- 除非題目另有指明，所有答案須寫出理由；只寫答案而無方法者，方法分（M）不給。
- 評分要點中 M 為方法分、A 為答案分、R 為推理分；A 分須在前一步 M 分成立時才給。
- 根式須化簡（例如 $\sqrt{252}$ 寫成 $6\sqrt{7}$ ），角度用弧度表示時須見 π 。