DSE 數學

中六（S6）　數學（必修部分）　|　時限：75 分鐘　|　總分：100 分　|　共 12 題

甲部（第 1 至 4 題，共 26 分）

細閱下列各題，寫出正確答案並加以解釋。若涉及計算，須列出算式及單位。

1. 一個圓錐的底半徑為 5 cm，高為 12 cm。求它的斜高、曲面面積、總表面積及體積（答案以 π 表示，並取至一位小數）。

答案：斜高 = $\sqrt{(5^2 + 12^2)} = 13$ cm。曲面面積 = $\pi \times 5 \times 13 = 65\pi \approx 204.2$ cm²。總表面積 = $65\pi + 25\pi = 90\pi \approx 282.7$ cm²。體積 = $(1/3) \times \pi \times 25 \times 12 = 100\pi \approx 314.2$ cm³。評分：斜高 2 分、曲面面積 1 分、總表面積 1 分、體積 2 分。

2. 兩個圓柱相似，對應長度之比為 2 : 3。較小圓柱的體積為 64 cm³，總表面積為 72 cm²。求較大圓柱的體積及總表面積，並說明所用的比例關係。

答案：體積比為 $(2:3)^3 = 8:27$，故較大體積 = $64 \times 27/8 = 216$ cm³。表面積比為 $(2:3)^2 = 4:9$，故較大表面積 = $72 \times 9/4 = 162$ cm²。評分：體積比 2 分、表面積比 2 分、兩個答案各 1 分。

3. 一個底半徑 7 cm、高 20 cm 的實心圓柱被熔化，再鑄成半徑 3 cm 的小球。求可鑄成小球的最多數目，以及剩餘金屬的體積。

答案：圓柱體積 = $\pi \times 49 \times 20 = 980\pi$ cm³。每個小球體積 = $(4/3) \times \pi \times 27 = 36\pi$ cm³。$980\pi \div 36\pi = 27.2$，故最多可鑄 27 個。剩餘體積 = $980\pi - 972\pi = 8\pi \approx 25.1$ cm³。評分：圓柱體積 2 分、球體積 2 分、個數 2 分、餘料 1 分。

4. 一個正稜柱的橫截面是梯形，兩條平行邊分別長 8 cm 及 14 cm，梯形的高為 6 cm，稜柱長 25 cm。求橫截面面積、稜柱體積；若材料密度為 2.7 g/cm³，求稜柱的質量（以 kg 表示）。

答案：橫截面面積 = $(8 + 14) \div 2 \times 6 = 66$ cm²。體積 = $66 \times 25 = 1650$ cm³。質量 = $1650 \times 2.7 = 4455$ g = 4.455 kg。評分：截面面積 2 分、體積 2 分、質量及單位換算 3 分。

乙部（第 5 至 8 題，共 32 分）

回答下列各題，須展示計算步驟及單位，並以題目提供的資料支持論點。

5. 一個長方形的長與寬分別量得 12.4 cm 及 8.6 cm，準確至最接近的 0.1 cm。求面積的最大可能值，以及最大面積相對量度面積的百分誤差。

答案：最大尺寸為 12.45 cm 與 8.65 cm，最大面積 = 107.6925 cm²。量度面積 = $12.4 \times 8.6 = 106.64$ cm²。百分誤差 = $(107.6925 - 106.64) \div 106.64 \times 100\% \approx 0.99\%$。評分：上限尺寸 2 分、最大面積 2 分、百分誤差 2 分。

6. 一個半徑 9 cm 的實心金屬球被熔化，再鑄成一個底半徑 9 cm 的圓錐。求圓錐的高，以及該球原來的表面積。

答案：球體積 = $(4/3) \times \pi \times 729 = 972\pi$ cm³。設圓錐高為 h，則 $(1/3) \times \pi \times 81 \times h = 972\pi$，得 h = 36 cm。球表面積 = $4\pi \times 81 = 324\pi \approx 1017.9$ cm²。評分：球體積 2 分、建立等式 1 分、高 3 分、表面積 2 分。

7. 同一時刻，身高 1.8 m 的人影長 2.4 m，附近一支旗杆的影子長 12 m。求旗杆的高度；若另一時刻旗杆影子長 15 m，求該時刻人影的長度，並解釋兩次計算的共通原理。

答案：由相似三角形，旗杆高 $\div 12 = 1.8 \div 2.4$，故旗杆高 = 9 m。另一時刻人影 = $1.8 \times 15 \div 9 = 3.0$ m。兩次均利用同一時刻太陽光線平行，人與旗杆構成相似三角形，對應邊成比例。評分：比例式 3 分、旗杆高 3 分、第二情況 2 分、原理解釋 1 分。

8. 一個大圓錐的底半徑 9 cm、高 24 cm，在離頂點 8 cm 處以平行於底面的平面切去小圓錐，餘下部分稱為圓台。求大圓錐與小圓錐的體積，圓台的體積，以及兩者體積之比。

答案：大圓錐體積 = (1/3) × π × 81 × 24 = 648π cm³。小圓錐與大圓錐相似，長度比 8 : 24 = 1 : 3，體積 = 648π ÷ 27 = 24π cm³。圓台體積 = 624π ≈ 1960.4 cm³。體積比為 27 : 1。評分：大圓錐 2 分、小圓錐 2 分、圓台 2 分、體積比及解釋 3 分。

丙部（第 9 至 12 題，共 42 分）

就下列各題作較詳細的論述，須使用正確的學科術語，並以香港或日常情況舉例。

9. 一個複合立體由底半徑 6 cm、高 10 cm 的圓柱，以及在圓柱頂部加上一個同半徑的半球組成。求複合立體的體積及總表面積（包括底面）。

答案：圓柱體積 = π × 36 × 10 = 360π cm³，半球體積 = (2/3) × π × 216 = 144π cm³，合共 504π ≈ 1583.4 cm³。表面積 = 圓柱側面 2π × 6 × 10 = 120π，半球曲面 2π × 36 = 72π，底面 π × 36 = 36π，合共 228π ≈ 716.3 cm²。評分：兩部分體積各 2 分、三個面積部分各 2 分。

10. 兩個相似的模型，對應長度之比為 1 : 4。已知較小模型的表面積為 200 cm²，質量為 1.5 kg。求較大模型的表面積與質量；若油漆每升可塗 1000 cm²，每升售 18 元，求為較大模型上漆的材料費。

答案：表面積比 = 1 : 16，較大表面積 = 200 × 16 = 3200 cm²。體積與質量比 = 1 : 64，較大質量 = 1.5 × 64 = 96 kg。所需油漆 = 3200 ÷ 1000 = 3.2 L，費用 = 3.2 × 18 = 57.6 元。評分：兩個比各 2 分、質量 2 分、油漆量 2 分、費用 2 分。

11. 一個圓柱形水箱的底半徑 1.2 m、高 2 m。水以每分鐘 15 L 注入。求水箱的容積（以 L 表示）、注滿所需的時間（以分鐘及小時表示），以及注至容積四分之三時所需的時間。

答案：容積 = π × 1.44 × 2 = 2.88π ≈ 9.048 m³ = 9047.8 L。注滿時間 = 9047.8 ÷ 15 ≈ 603.2 分鐘 ≈ 10.05 小時。注至四分之三需 9047.8 × 0.75 ÷ 15 ≈ 452.4 分鐘 ≈ 7.54 小時。評分：體積 2 分、單位換算 2 分、注滿時間 3 分、四分之三 3 分、單位表達 1 分。

12. 一個有蓋圓柱的體積固定為 500 cm³。以微積分或配方的方法求令總表面積最小的底半徑與高，並求該最小表面積；同時說明最小表面積出現時，高與底半徑的關係。

答案：設底半徑 r、高 h，則 πr²h = 500，總表面積 S = 2πr² + 1000/r。令 dS/dr = 4πr − 1000/r² = 0，得 r³ = 250/π，r ≈ 4.30 cm，h ≈ 8.60 cm。最小表面積 = 2π(18.5) + 1000/4.30 ≈ 348.7 cm²。此時 h = 2r，即高等於直徑的長度。評分：關係式 3 分、r 及 h 各 2 分、最小表面積 3 分、關係解釋 1 分。

TutorZone 中六（S6）數學（必修部分）練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。