

IGCSE 附加數學 0606 Paper 1 第二份練習卷

IGCSE 附加數學 | 時限：120 分鐘 | 總分：80 分 | 共 10 題

甲部：短題目 (32 分)

回答全部題目，須列出計算步驟。

1. 在 40 名學生的調查中，24 人喜歡數學 (M)，18 人喜歡物理 (P)，8 人同時喜歡兩科。(a) 畫溫氏圖並求喜歡至少一科的人數。(3 分) (b) 求兩科都不喜歡的人數。(2 分) (c) 隨機抽一名學生，求他只喜歡其中一科的機率。(3 分)

答案：(a) $n(M \cup P) = 24 + 18 - 8 = 34$ 人。(3 分) (b) $40 - 34 = 6$ 人。(2 分) (c) 只喜歡數學 16 人、只喜歡物理 10 人，共 26 人；機率 $= 26/40 = 13/20 = 0.65$ 。(3 分)

2. (a) 解不等式 $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ 。(3 分) (b) 求 k 的取值範圍，使二次方程 $2x^2 + kx + 8 = 0$ 有實根。(5 分)

答案：(a) $(x-2)(x-3) \leq 0$ ，故 $2 \leq x \leq 3$ 。(3 分) (b) 判別式 $\Delta = k^2 - 4(2)(8) = k^2 - 64 \geq 0$ ，即 $k \leq -8$ 或 $k \geq 8$ 。(5 分： Δ 正確 2 分、解不等式 3 分)

3. 設 $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ 。(a) 證明 $(x-1)$ 是 $P(x)$ 的因式。(2 分) (b) 將 $P(x)$ 完整分解為一次因式的乘積。(3 分) (c) 解方程 $P(x) = 0$ 。(3 分)

答案：(a) $P(1) = 2 + 3 - 3 - 2 = 0$ ，故 $(x-1)$ 為因式。(2 分) (b) 長除得商 $2x^2 + 5x + 2 = (2x+1)(x+2)$ ，故 $P(x) = (x-1)(2x+1)(x+2)$ 。(3 分) (c) $x=1$ 、 $x=-1/2$ 、 $x=-2$ 。(3 分)

4. (a) 將 $(5x+7)/((x+1)(x+2))$ 化為部分分式。(4 分) (b) 由此求 $\int_0^1 (5x+7)/((x+1)(x+2)) dx$ 的準確值。(4 分)

答案：(a) 設 $A/(x+1) + B/(x+2)$ ，則 $A(x+2) + B(x+1) = 5x+7$ ；比較係數得 $A+B=5$ 、 $2A+B=7$ ，解得 $A=2$ 、 $B=3$ 。(4 分) (b) 原式 $= [2\ln(x+1) + 3\ln(x+2)]_0^1 = (2\ln 2 + 3\ln 3) - (0 + 3\ln 2) = 3\ln 3 - \ln 2 = \ln(27/2) \approx 2.603$ 。(4 分)

乙部：對數、圓與三角 (26 分)

回答全部題目，答案須準確至三位有效數字（除另有指明）。

5. 解方程 $\log_2 x + \log_2 (x-3) = 2$ 。(a) 證明此方程可化為 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 。(4 分) (b) 由此解方程，並說明為何要剔除其中一個根。(5 分)

答案：(a) 合併對數： $\log_2 [x(x-3)] = 2$ ，故 $x(x-3) = 4$ ，即 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 。(4 分) (b) $(x-4)(x+1) = 0$ ，得 $x=4$ 或 $x=-1$ ；因對數要求 $x > 0$ 且 $x-3 > 0$ ， $x=-1$ 不合，故 $x=4$ 。驗算： $\log_2 4 + \log_2 1 = 2$ 。(5 分)

6. 圓 C 的方程為 $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 24 = 0$ 。(a) 求 C 的圓心及半徑。(4 分) (b) 點 $P(10, 5)$ 在圓外。由 P 作切線與圓相切於 T，求 PT 的長度（準確值及三位小數）。(5 分)

答案：(a) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 49$ ，故圓心 $(4, -3)$ ，半徑 7。(4 分) (b) $PC^2 = (10-4)^2 + (5+3)^2 = 36 + 64 = 100$ ； $PT^2 = PC^2 - r^2 = 100 - 49 = 51$ ， $PT = \sqrt{51} \approx 7.141$ 。(5 分)

7. (a) 解方程 $2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$ ，其中 $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ 。(5分) (b) 由此解 $2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$ ，其中 $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ 。(3分)

答案：(a) $(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) = 0$ ，故 $\cos\theta = 1$ 或 $\cos\theta = -1/2$ ，得 $\theta = 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$ 。(5分) (b) 由 (a) 得 $2x = 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 360^\circ$ (範圍內)，故 $x = 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ 。(3分)

丙部：應用題 (22 分)

回答全部題目，須列出完整步驟及單位。

8. 設 $f(\theta) = 3\sin\theta + 4\cos\theta$ 。(a) 將 $f(\theta)$ 寫成 $R \sin(\theta + \alpha)$ 的形式，其中 $R > 0$ ， α 在 0° 與 90° 之間，準確至小數兩位。(4分) (b) 由此求 $f(\theta)$ 的最大值及相應的 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$)。(3分)

答案：(a) $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ， $\tan\alpha = 4/3$ 得 $\alpha \approx 53.13^\circ$ ，故 $f(\theta) = 5\sin(\theta + 53.13^\circ)$ 。(4分) (b) 最大值 5，當 $\theta + 53.13^\circ = 90^\circ$ 即 $\theta \approx 36.87^\circ$ 。(3分)

9. 一質點沿直線運動，位移 s 米與時間 t 秒的關係為 $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ ($t \geq 0$)。(a) 求速度 v 及加速度 a 的表達式。(2分) (b) 求質點靜止的時刻。(2分) (c) 求首 2 秒內質點移動的總路程。(4分)

答案：(a) $v = 3t^2 - 12t + 9$ ， $a = 6t - 12$ 。(2分) (b) $3(t-1)(t-3) = 0$ ，故 $t = 1$ 秒及 $t = 3$ 秒。(2分) (c) $s(1) = 4$ 、 $s(2) = 2$ ， $t = 1$ 時改變方向；路程 $= |4 - 0| + |2 - 4| = 4 + 2 = 6$ 米。(4分)

10. 5 名男生與 4 名女生排成一行。(a) 若 4 名女生必須相鄰，共有多少種排法？(3分) (b) 若所有排法等可能，求 4 名女生剛好全部相鄰的概率。(4分)

答案：(a) 把 4 名女生視為一個整體，與 5 名男生共 6 個單位： $6! \times 4! = 720 \times 24 = 17,280$ 種。(3分) (b) 總排法 $9! = 362,880$ ，概率 $= 17,280 / 362,880 = 1/21 \approx 0.0476$ 。(4分)