

AP 微積分 AB Section II 自由作答模擬卷 | 6 題 · 100 分 · 1 小時 30 分

中五至中六 (AP) 數學 | 時限：90 分鐘 | 總分：100 分 | 共 6 題

甲部：計算機可用部分 (36 分)

自由作答题：須寫出完整解題步驟，只寫答案不給分；數值答案須附正確單位及恰當有效數字。全卷 100 分，限時 90 分鐘。

1.1. 一質點沿直線運動，在 t 秒 ($t \geq 0$) 時距固定點 O 的位移為 $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 2$ 米。(a) 求速度 $v(t)$ ，並求質點瞬時靜止的時刻，須說明理由。(4 分) (b) 求加速度 $a(t)$ 及它為零的時刻。(3 分) (c) 求 $t = 0$ 至 $t = 4$ 期間質點走過的總路程。(5 分) (d) 求 $0 \leq t \leq 4$ 的平均速度，並解釋為何它與總路程的數值不同。(3 分) (e) 寫出速率正在增加的時間區間，並以 v 與 a 的正負號說明理由。(3 分)

答案：答案：(a) $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3)$ ，故 $t = 1$ 秒及 $t = 3$ 秒時速度為零，質點瞬時靜止。(b) $a(t) = v'(t) = 6t - 12$ ， $t = 2$ 秒時 $a = 0$ 。(c) $s(0) = 2$ 、 $s(1) = 6$ 、 $s(3) = 2$ 、 $s(4) = 6$ ；0 至 1 秒走 4 米（正向），1 至 3 秒走 4 米（反向），3 至 4 秒走 4 米（正向），總路程 12 米。(d) 平均速度 $= (s(4) - s(0)) \div 4 = (6 - 2) \div 4 = 1 \text{ m s}^{-1}$ ；總路程把反向的 4 米亦計作正數，故比位移 4 米大。(e) 速率 $= |v|$ ：1 $\leq t \leq 2$ 時 v 負、 a 負，同號，速率增加；2 $\leq t \leq 3$ 時 v 負、 a 正，異號，速率減少；3 $\leq t \leq 4$ 時 v 正、 a 正，同號，速率增加。故速率增加的區間為 $1 \leq t \leq 2$ 及 $3 \leq t \leq 4$ 。

2.2. 一圓錐形水缸尖端向下，缸口半徑 4 米、深 8 米，水以每分鐘 2 立方米的速率注入。(a) 以相似三角形證明水面半徑 r 與水深 h 滿足 $r = h \div 2$ ，並求水深 5 米時水面上升的速率。(5 分) (b) 求水深 4 米時水面上升的速率，並說明為何它比 (a) 的結果大。(4 分) (c) 一把長 13 英尺的梯子斜靠垂直牆壁，梯腳以每秒 2 英尺遠離牆壁滑出。求梯腳距牆 5 英尺時，梯頂下滑的速率。(4 分) (d) 在半徑 6 的球體內內接一圓柱，求該圓柱的最大體積。(5 分)

答案：答案：(a) 相似三角形給出 $r \div h = 4 \div 8$ ，故 $r = h \div 2$ 。體積 $V = (1/3)\pi r^2 h = \pi h^3 \div 12$ ，對 t 求導得 $dV/dt = (\pi h^2 \div 4)(dh/dt)$ ；代入 $dV/dt = 2$ 、 $h = 5$ ，得 $dh/dt = 8 \div (25\pi) \approx 0.1019 \text{ m min}^{-1}$ 。(b) $h = 4$ 時 $dh/dt = 8 \div (16\pi) = 1 \div (2\pi) \approx 0.1592 \text{ m min}^{-1}$ ；水面截面積隨水深平方增大，水淺時同樣注水量令水位升得更快（反而更大）。(c) 設梯腳距牆 x 、梯頂高 y ， $x^2 + y^2 = 169$ ； $x = 5$ 時 $y = 12$ 。求導： $2x(dx/dt) + 2y(dy/dt) = 0$ ， $dy/dt = -(x \div y)(dx/dt) = -(5 \div 12)(2) = -5/6 \approx -0.833 \text{ ft s}^{-1}$ ，即每秒下滑約 0.833 英尺。(d) 設圓柱高 h 、半徑 r ， $r^2 + (h \div 2)^2 = 36$ ，故 $V = \pi r^2 h = \pi(36 - h^2 \div 4)h = 36\pi h - (\pi \div 4)h^3$ 。 $V' = 36\pi - (3\pi \div 4)h^2 = 0$ 得 $h^2 = 48$ ， $h = 4\sqrt{3} \approx 6.928$ ， $r^2 = 24$ 。 $V = 24\pi(4\sqrt{3}) = 96\pi\sqrt{3} \approx 522.37$ ；因 V'' 在該點為負，此為最大體積。

乙部：計算機不可用部分（64 分）

自由作題：須寫出完整解題步驟，只寫答案不給分；數值答案須附正確單位及恰當有效數字。全卷 100 分，限時 90 分鐘。

3. 3. (a) 曲線 $x^2 + xy + y^2 = 7$ 。以隱函數微分求 dy/dx ，並求點 $(1, 2)$ 處的切線方程。（6 分）(b) 求該曲線上所有水平切線的切點坐標（準確值）。（5 分）(c) 設 $f(x) = x^2e^{-x}$ ，求 f 的極大值點及極大值（準確值，並以三位小數表示）。（4 分）(d) 求 $d/dx [\ln(x^2 + 1)]$ 在 $x = 1$ 的值。（3 分）

答案：答案：(a) 對 x 求導： $2x + y + x(dy/dx) + 2y(dy/dx) = 0$ ，故 $dy/dx = -(2x + y) \div (x + 2y)$ 。在 $(1, 2)$ ： $dy/dx = -4 \div 5 = -0.8$ 。切線為 $y - 2 = -0.8(x - 1)$ ，即 $y = 2.8 - 0.8x$ 。(b) 水平切線須 $dy/dx = 0$ ，即 $2x + y = 0$ ， $y = -2x$ 。代入原式： $x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 3x^2 = 7$ ， $x = \pm \sqrt{7/3} \approx \pm 1.5275$ ，相應 $y = \mp 3.0551$ 。切點為 $(1.5275, -3.0551)$ 與 $(-1.5275, 3.0551)$ 。(c) $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$ ，臨界點 $x = 0$ 及 $x = 2$ 。 $f(0) = 0$ 、 $f(2) = 4e^{-2} \approx 0.541$ ； f' 在 0 與 2 之間為正、在 2 之後為負，故 $x = 2$ 為極大值點，極大值 $4 \div e^2 \approx 0.541$ 。(d) $d/dx \ln(x^2 + 1) = 2x \div (x^2 + 1)$ ，在 $x = 1$ 時等於 1。

4. 4. 設 $f(x) = 4 - x^2$ 、 $g(x) = x + 2$ 。(a) 求兩曲線的交點，並求由兩曲線圍成區域的面積（準確值）。（6 分）(b) 該區域繞 x 軸旋轉，求旋轉體的體積（準確值，並以三位小數表示）。（6 分）(c) 求 f 在 $0 \leq x \leq 2$ 上的平均值。（4 分）

答案：答案：(a) $4 - x^2 = x + 2$ 得 $x^2 + x - 2 = 0$ ，故 $x = 1$ 或 $x = -2$ 。面積 = $\int$ (由 -2 到 1) $(2 - x - x^2)dx = [2x - x^2/2 - x^3/3]$ 由 -2 到 $1 = 7/6 - (-10/3) = 9/2 = 4.5$ 。(b) 體積 = $\pi \int$ (由 -2 到 1) $[(4 - x^2)^2 - (x + 2)^2]dx = \pi \int (x^4 - 9x^2 - 4x + 12)dx = \pi[x^5/5 - 3x^3 - 2x^2 + 12x]$ 由 -2 到 $1 = \pi(36/5 + 72/5) = 108\pi/5 \approx 67.858$ 。(c) 平均值 = $(1/2) \int$ (由 0 到 2) $(4 - x^2)dx = (1/2)(8 - 8/3) = 8/3 \approx 2.667$ 。

5. 5. 微分方程 $dy/dx = 2xy$ ，初始條件 $y(0) = 3$ 。(a) 以分離變量法求通解及符合初始條件的特解，並求 $y(1)$ （四位小數）。（6 分）(b) 用歐拉法由 $x = 0$ 起以步長 0.5 估算 $y(1)$ ，須列出每一步。（5 分）(c) 設 $g(x) = \int$ (由 0 到 x) $(t^2 - 2t)dt$ ，求 g 在 $x \geq 0$ 的極小值點及極小值。（5 分）

答案：答案：(a) $dy \div y = 2x dx$ ，積分得 $\ln|y| = x^2 + C$ ，故 $y = Ae^{x^2}$ ；由 $y(0) = 3$ 得 $A = 3$ ，特解 $y = 3e^{x^2}$ ， $y(1) = 3e \approx 8.1548$ 。(b) $x = 0$ 、 $y = 3$ ，斜率 $2(0)(3) = 0$ ， $y(0.5) \approx 3 + 0.5(0) = 3$ ；斜率 $2(0.5)(3) = 3$ ， $y(1) \approx 3 + 0.5(3) = 4.5$ 。歐拉估值 4.5 遠低於真值 8.155，因為解曲線向上凸，切線法每步都低估。(c) $g'(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$ ，臨界點 $x = 0$ 及 $x = 2$ ； $g''(2) = 2$ 為正，故 $x = 2$ 為極小值點， $g(2) = 8/3 - 4 = -4/3 \approx -1.333$ 。

6. 6. (a) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(4x) \div (5x)$ 。（3 分）(b) 以 $n = 4$ 的右端黎曼和估算 $\int$ (由 0 到 2) $x^2 dx$ ，求估算值、真值及誤差（準確值）。（5 分）(c) 設 $f(x) = ax^2 + b$ （當 $x \leq 1$ ）及 $f(x) = 2x + 3$ （當 x 大於 1）。求 a 、 b 使 f 在 $x = 1$ 連續且可微。（3 分）(d) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 + 2x) \div (x^2 - 5)$ 。（3 分）

答案：答案：(a) 用洛必達法則： $\lim = 4\cos(4x) \div 5$ ，在 $x = 0$ 時為 $4/5 = 0.8$ （亦可用 $\sin u \div u \rightarrow 1$ ）。(b) $\Delta x = 0.5$ ，右端點 0.5、1、1.5、2，和 = $0.5(0.25 + 1 + 2.25 + 4) = 3.75$ ；真值 = $8/3 \approx 2.667$ ；誤差 = $15/4 - 8/3 = 13/12 \approx 1.083$ （因 x^2 遞增，右端和為上估）。(c) 連續要求 $a + b = 2(1) + 3 = 5$ ；可微要求左導數 $2a(1)$ 等於右導數 2，故 $a = 1$ 、 $b = 4$ 。驗證：兩邊極限均為 5，左右導數均為 2。(d) 分子分母同除 x^2 ： $\lim = (3 + 2 \div x) \div (1 - 5 \div x^2) = 3$ 。