DSE 數學

中六（S6）　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 12 題

甲部（Q1 – Q4）：微分法及其應用（32 分）

微分法：多項式、對數與指數函數求導，切線、變化率與極值應用。

1. （微分・鏈式法則）設 $y = (3x^2 + 1)^4$。(a) 求 dy/dx。(b) 求曲線在 $x = 1$ 處的切線方程，並以 $y = mx + c$ 的形式表示。

答案：答案：(a) 設 $u = 3x^2 + 1$，則 $y = u^4$，$dy/du = 4u^3$，$du/dx = 6x$，故 $dy/dx = 24x(3x^2 + 1)^3$。[4 分] (b) $x = 1$ 時 $y = 4^4 = 256$，斜率 $= 24(1)(4)^3 = 1536$，故切線為 $y - 256 = 1536(x - 1)$，即 $y = 1536x - 1280$。[4 分]

2. （微分・對數函數）設 $y = x^2 \ln x$，其中 x 大於 0。(a) 求 dy/dx，並化簡為 $x(2 \ln x + 1)$。(b) 求曲線在 $x = e$ 處的切線斜率，答案以 e 表示，並取三位小數。

答案：答案：(a) 由積法則 $dy/dx = 2x \ln x + x^2(1/x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$。[4 分] (b) $x = e$ 時 $y = e^2 \approx 7.389$，斜率 $= e(2 + 1) = 3e \approx 8.155$。[4 分]

3. （變化率）球形氣球的體積 V 以每秒 $50\ \text{cm}^3$ 的速率增加，已知 $V = (4/3)\pi r^3$。(a) 求當 $r = 5\ \text{cm}$ 時半徑的增加率 dr/dt。(b) 求同一時刻表面面積 $A = 4\pi r^2$ 的增加率 dA/dt。(c) 說明氣球繼續膨脹時 dr/dt 會增加還是減少，並簡述理由。

答案：答案：(a) $dV/dr = 4\pi r^2$，$r = 5$ 時為 100π，故 $dr/dt = 50/(100\pi) \approx 0.159\ \text{cm/s}$。[3 分] (b) $dA/dt = 8\pi r(dr/dt) = 8\pi(5)(0.159) = 20\ \text{cm}^2/\text{s}$。[2 分] (c) $dr/dt = 50/(4\pi r^2)$，r 增加令分母變大，故 dr/dt 減少。[3 分]

4. （極值應用）一個無蓋長方體箱底部為正方形，體積固定為 $32\ \text{m}^3$。設底部邊長 x m、高 h m。(a) 以 x 表示 h。(b) 證明表面面積 $S = x^2 + 128/x$，並求使 S 最小的 x。(c) 求最小表面面積。

答案：答案：(a) $x^2h = 32$，故 $h = 32/x^2$。[3 分] (b) $S = x^2 + 4xh = x^2 + 128/x$；$dS/dx = 2x - 128/x^2 = 0$ 得 $x^3 = 64$，即 $x = 4$；$d^2S/dx^2 = 2 + 256/x^3$，$x = 4$ 時為 6 大於 0，故為極小。[3 分] (c) $h = 2$，$S = 16 + 32 = 48\ \text{m}^2$。[2 分]

乙部（Q5 – Q8）：積分法、面積與梯形法則（36 分）

積分法：原函數、定積分、曲線下面積與梯形法則。

5. （定積分）計算 $\int_1^3 (3x^2 - 4x + 5)\,dx$，並寫出所用的原函數。

答案：答案：原函數 $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$。[4 分]；$F(3) = 27 - 18 + 15 = 24$，$F(1) = 1 - 2 + 5 = 4$，故積分值 $= 24 - 4 = 20$。[5 分]

6. （定積分・對數）計算 $\int_1^e (1/x + 2)\,dx$。(a) 先寫出原函數。(b) 求積分值，答案以 e 表示並取三位小數。

答案：答案：(a) 原函數為 $\ln x + 2x$。[4 分] (b) $(\ln e + 2e) - (0 + 2) = 1 + 2e - 2 = 2e - 1 \approx 4.437$。[5 分]

7. （曲線下面積）曲線 $y = x^2 - 4x + 3$ 與 x 軸交於 A、B 兩點。(a) 求 A、B 的 x 坐標。(b) 求曲線與 x 軸所圍區域的面積。(c) 說明為何直接計算 $\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\,dx$ 會得出負值。

答案：答案：(a) $x^2 - 4x + 3 = 0$，即 $(x - 1)(x - 3) = 0$，故 $x = 1$ 與 $x = 3$。[3 分] (b) 原函數 $x^3/3 - 2x^2 + 3x$，$(9 - 18 + 9) - (1/3 - 2 + 3) = -4/3$，面積取絕對值 $4/3 \approx 1.333$ 平方單位。[4 分] (c) 該段曲線位於 x 軸下方，定積分帶負號，面積須取絕對值，故直接計算只得負值。[2 分]

8. （梯形法則）設 $f(x) = e^x$。用 4 個等寬子區間，以梯形法則估算 $\int_0^1 e^x\,dx$。(a) 寫出 h 及分點 x_0 至 x_4。(b) 求估算值（五位小數）。(c) 與準確值 $e - 1$ 比較，求絕對誤差，並說明估算偏高還是偏低。

答案：答案：(a) $h = 0.25$，分點為 0、0.25、0.5、0.75、1。[3 分] (b) $T = (0.25/2)[1 + e + 2(e^{0.25} + e^{0.5} + e^{0.75})] \approx 1.72722$。[3 分] (c) 準確值為 1.71828，絕對誤差約 0.00894；估算偏高，因 e^x 為凸函數，各弦位於曲線之上。[3 分]

丙部（Q9 – Q12）：概率分佈與統計推論（32 分）

統計：二項、正態與泊松分佈，標準誤與置信區間。

9. （二項分佈）設 $X \sim B(10, 0.3)$。(a) 求 E(X) 與 Var(X)。(b) 求 $P(X = 3)$（四位小數）。(c) 求 $P(X \geqslant 1)$（四位小數）。

答案：答案：(a) $E(X) = np = 3$，$\mathrm{Var}(X) = np(1 - p) = 2.1$。[3 分] (b) $P(X = 3) = C(10,3)(0.3)^3(0.7)^7 = 120 \times 0.027 \times 0.0823543 \approx 0.2668$。[3 分] (c) $P(X \geqslant 1) = 1 - 0.7^{10} = 1 - 0.0282475 \approx 0.9718$。[2 分]

10. （正態分佈）設 $X \sim N(50, 8^2)$。(a) 求 $P(X$ 大於 $62)$。(b) 求 k 使 $P(X$ 小於 $k) = 0.9$（三位小數）。(c) 說明為何 $P(42 \leqslant X \leqslant 58)$ 約為 0.68。

答案：答案：(a) $z = (62 - 50)/8 = 1.5$，$P(X$ 大於 $62) = 1 - \Phi(1.5) \approx 0.0668$。[3 分] (b) $\Phi(z) = 0.9$ 得 $z \approx 1.2816$，故 $k = 50 + 8(1.2816) \approx 60.252$。[3 分] (c) 42 與 58 分別距平均值一個標準差，正態分佈在正負一個標準差內約佔 68.27%。[2 分]

11. （泊松近似）某工廠每件產品有 1% 機會有瑕疵，各件獨立。現抽取 200 件，以泊松分佈近似計算：(a) 參數 λ；(b) 沒有瑕疵品的概率；(c) 至少兩件瑕疵品的概率。概率取四位小數。

答案：答案：(a) $\lambda = 200 \times 0.01 = 2$。[2 分] (b) $P(X = 0) = e^{-2} \approx 0.1353$。[3 分] (c) $P(X \geqslant 2) = 1 - e^{-2}(1 + 2) = 1 - 0.4060 \approx 0.5940$。[3 分]

12. （置信區間）某品牌咖啡每包淨重量呈正態分佈，標準差 12 克。隨機抽取 64 包，樣本平均重量 42 克。(a) 求樣本平均值的標準誤。(b) 求母體平均重量的 95% 置信區間。(c) 若樣本數增至 144，區間寬度變為原來的多少倍？

答案：答案：(a) 標準誤 $= 12/\sqrt{64} = 1.5$ 克。[2 分] (b) $42 \pm 1.96(1.5) = 42 \pm 2.94$，即 (39.06, 44.94) 克。[3 分] (c) 新標準誤 $= 12/12 = 1$，寬度比 $= 1/1.5 = 2/3$，即縮窄至原來的三分之二。[3 分]

TutorZone 中六（S6）數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。