DSE 數學

中六（S6）　數學　|　時限：75 分鐘　|　總分：100 分　|　共 12 題

甲部（Q1 – Q4）：微分法及其應用（32 分）

微分法：多項式、對數與指數函數求導，切線、變化率與極值應用。

1. （微分・鏈式法則）設 $y = (3x^2 + 1)^4$。(a) 求 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$。(b) 求曲線在 $x = 1$ 處的切線方程，並以 $y = mx + c$ 的形式表示。

2. （微分・對數函數）設 $y = x^2 \ln x$，其中 x 大於 0。(a) 求 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，並化簡為 $x(2\ln x + 1)$。(b) 求曲線在 $x = e$ 處的切線斜率，答案以 e 表示，並取三位小數。

3. （變化率）球形氣球的體積 V 以每秒 $50\ \mathrm{cm}^3$ 的速率增加，已知 $V = (4/3)\pi r^3$。(a) 求當 $r = 5\ \mathrm{cm}$ 時半徑的增加率 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$。(b) 求同一時刻表面面積 $A = 4\pi r^2$ 的增加率 $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$。(c) 說明氣球繼續膨脹時 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ 會增加還是減少，並簡述理由。

4. （極值應用）一個無蓋長方體箱底部為正方形，體積固定為 $32\ \mathrm{m}^3$。設底部邊長 x m、高 h m。(a) 以 x 表示 h。(b) 證明表面面積 $S = x^2 + 128/x$，並求使 S 最小的 x。(c) 求最小表面面積。

乙部（Q5 – Q8）：積分法、面積與梯形法則（36 分）

積分法：原函數、定積分、曲線下面積與梯形法則。

5. （定積分）計算 $\int_{1}^{3} (3x^2 - 4x + 5)\,\mathrm{d}x$，並寫出所用的原函數。

6. （定積分・對數）計算 $\int_{1}^{e} (1/x + 2)\,\mathrm{d}x$。(a) 先寫出原函數。(b) 求積分值，答案以 e 表示並取三位小數。

7. （曲線下面積）曲線 $y = x^2 - 4x + 3$ 與 x 軸交於 A、B 兩點。(a) 求 A、B 的 x 坐標。(b) 求曲線與 x 軸所圍區域的面積。(c) 說明為何直接計算 $\int_{1}^{3} (x^2 - 4x + 3)\,\mathrm{d}x$ 會得出負值。

8. （梯形法則）設 $f(x) = e^x$。用 4 個等寬子區間，以梯形法則估算 $\int_{0}^{1} e^x\,\mathrm{d}x$。(a) 寫出 h 及分點 x_0 至 x_4。(b) 求估算值（五位小數）。(c) 與準確值 $e - 1$ 比較，求絕對誤差，並說明估算偏高還是偏低。

丙部（Q9 – Q12）：概率分佈與統計推論（32 分）

統計：二項、正態與泊松分佈，標準誤與置信區間。

9. （二項分佈）設 $X \sim B(10, 0.3)$。(a) 求 $E(X)$ 與 $\mathrm{Var}(X)$。(b) 求 $P(X = 3)$（四位小數）。(c) 求 $P(X \geqslant 1)$（四位小數）。

10. （正態分佈）設 $X \sim N(50, 8^2)$。(a) 求 $P(X$ 大於 $62)$。(b) 求 k 使 $P(X$ 小於 $k) = 0.9$（三位小數）。(c) 說明為何 $P(42 \leqslant X \leqslant 58)$ 約為 0.68。

11. （泊松近似）某工廠每件產品有 1% 機會有瑕疵，各件獨立。現抽取 200 件，以泊松分佈近似計算：(a) 參數 λ；(b) 沒有瑕疵品的概率；(c) 至少兩件瑕疵品的概率。概率取四位小數。

12. （置信區間）某品牌咖啡每包淨重量呈正態分佈，標準差 12 克。隨機抽取 64 包，樣本平均重量 42 克。(a) 求樣本平均值的標準誤。(b) 求母體平均重量的 95% 置信區間。(c) 若樣本數增至 144，區間寬度變為原來的多少倍？

TutorZone 中六（S6）數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。