DSE 數學

中六（S6）　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 12 題

甲部（Q1 – Q4）：行列式、逆矩陣與線性方程組（32 分）

矩陣與行列式：三階行列式展開、餘因式、逆矩陣、克拉瑪法則與方程組唯一解的條件。

1. （行列式）設 A 為三階方陣，第一行為 1、2、3，第二行為 0、4、5，第三行為 1、0、6。(a) 沿第一行展開求 det A。(b) 求 A 的第 (2,3) 個元素所對應的餘因式。(c) 求 det(3A)。

答案：答案：(a) 沿第一行展開：det A = 1×(4×6 − 5×0) − 2×(0×6 − 5×1) + 3×(0×0 − 4×1) = 24 + 10 − 12 = 22。[4 分] (b) 刪去第二行第三列餘下第一行 1、2，第二行 1、0，其行列式 = 1×0 − 2×1 = −2，故餘因式 = $(-1)^{5}$ ×(−2) = 2。[2 分] (c) det(3A) = 3^{3} × 22 = 594。[2 分]

2. （逆矩陣）設 B 為二階方陣，第一行為 3、5，第二行為 1、2。(a) 求 det B 及 B^{-1}。(b) 用 B^{-1} 解方程組 3x + 5y = 4、x + 2y = 1。(c) 說明為何行列式為零的方陣沒有逆矩陣。

答案：答案：(a) det B = 3×2 − 5×1 = 1，故 B^{-1} = (1/1)×第一行 2、−5、第二行 −1、3 = 第一行 2、−5，第二行 −1、3。[4 分] (b) x = 2×4 − 5×1 = 3，y = −1×4 + 3×1 = −1。[3 分] (c) 逆矩陣公式帶因子 1/det B；det B = 0 時該因子無意義，且矩陣把平面壓成一直線，不能還原。[1 分]

3. （線性方程組）解方程組 x + 2y + z = 8、2x − y + 3z = 9、3x + y − z = 2。(a) 求係數矩陣的行列式。(b) 用克拉瑪法則求 x、y、z。(c) 說明行列式不為零如何保證解唯一。

答案：答案：(a) det = 1×((−1)×(−1) − 3×1) − 2×(2×(−1) − 3×3) + 1×(2×1 − (−1)×3) = −2 + 22 + 5 = 25。[3 分] (b) 以常數欄依次替換三欄，得行列式 25、50、75，故 x = 1、y = 2、z = 3。[3 分] (c) 行列式不為零表示三條方程互相獨立，克拉瑪法則的分母不為零，故解存在且唯一。[2 分]

4. （矩陣乘法）設 A 為第一行 1、2、第二行 3、4 的二階方陣，B 為第一行 0、1、第二行 1、0 的二階方陣。(a) 求 AB 與 BA，並說明矩陣乘法不可交換。(b) 求 A^{2}。(c) 驗證 det(AB) = det A × det B。

答案：答案：(a) AB = 第一行 2、1，第二行 4、3；BA = 第一行 3、4，第二行 1、2；兩者不等，故矩陣乘法不可交換。[4 分] (b) A^{2} = 第一行 7、10，第二行 15、22。[2 分] (c) det A = −2、det B = −1、det(AB) = 2×3 − 1×4 = 2 = (−2)×(−1)，驗證成立。[2 分]

乙部（Q5 – Q8）：矩陣性質、變換與向量運算（36 分）

矩陣運算與變換：乘法不可交換、行列式乘積性質、旋轉與反射矩陣、純量積與向量積。

5. （行列式性質）設 M 為三階方陣，第一行 2、0、1，第二行 1、3、2，第三行 0、1、1。(a) 求 det M。(b) 由此求 det(2M)、$\det(M^{2})$、$\det(M^{-1})$ 與 $\det(M^{T})$。(c) 若 N 為三階方陣且 det N = 5，求 det(MN) 及 $\det(N^{-1})$。

答案：答案：(a) det M = 2×(3×1 − 2×1) − 0×(1×1 − 2×0) + 1×(1×1 − 3×0) = 2 + 0 + 1 = 3。[3 分] (b) det(2M) = 2^{3}×3 = 24；$\det(M^{2})$ = 3^{2} = 9；$\det(M^{-1})$ = 1/3；$\det(M^{T})$ = 3。[3 分] (c) det(MN) = 3×5 = 15；$\det(N^{-1})$ = 1/5。[2 分]

6. （變換矩陣）設 R 表示逆時針旋轉 90° ，其第一行 0、−1，第二行 1、0；S 表示關於 y 軸的反射，其第一行 −1、0，第二行 0、1。(a) 求 RS，並描述合成變換的幾何效果。(b) 求點 (3, 4) 先經 S 再經 R 後的像。(c) 求 det(RS)，並說明它與面積變化的關係。

答案：答案：(a) RS = 第一行 0、−1，第二行 −1、0，即關於直線 y = −x 的反射。[4 分] (b) S(3, 4) = (−3, 4)，再 R(−3, 4) = (−4, −3)。[2 分] (c) det(RS) = 0×0 − (−1)×(−1) = −1；絕對值為 1 表示面積不變，負號表示定向反轉。[2 分]

7. （純量積與投影）設 a = (1, 2, 2)、b = (2, −2, 1)、c = (3, 1, 5)。(a) 證明 a 與 b 垂直，並求 |a| 與 |b|。(b) 求 c 在 a 方向上的投影向量及投影長度。(c) 求 c 到直線 r = t a 的最短距離，答案取三位小數。

答案：答案：(a) a · b = 1×2 + 2×(−2) + 2×1 = 0，故互相垂直；|a| = √(1+4+4) = 3，|b| = √(4+4+1) = 3。[4 分] (b) c · a = 3 + 2 + 10 = 15，投影向量 = (15/9)(1, 2, 2) = (5/3, 10/3, 10/3)，投影長度 = 15/3 = 5。[3 分] (c) |c|² = 9 + 1 + 25 = 35，最短距離 = √(35 − 25) = √10 ≈ 3.162。[3 分]

8. （向量積與平面）設三點 P(1, 0, 2)、Q(3, 2, 1)、R(0, 1, 4)。(a) 求向量 PQ 與 PR，再求 PQ × PR。(b) 求三角形 PQR 的面積，取三位小數。(c) 求通過 P、Q、R 的平面方程。(d) 求原點到該平面的距離，取三位小數。

答案：答案：(a) PQ = (2, 2, −1)、PR = (−1, 1, 2)；PQ × PR = (2×2 − (−1)×1, (−1)×(−1) − 2×2, 2×1 − 2×(−1)) = (5, −3, 4)。[4 分] (b) |PQ × PR| = √(25+9+16) = √50，面積 = √50/2 ≈ 3.536。[2 分] (c) 取 (5, −3, 4) 為法向量，代入 P 得 5x − 3y + 4z = 13。[2 分] (d) 距離 = 13/√50 ≈ 1.838。[2 分]

丙部（Q9 – Q12）：空間直線、平面與參數討論（32 分）

空間幾何：直線相交與夾角、三點定平面、點到平面距離、含參數方程組的解的討論。

9. （空間直線）L1: r = (1, 2, 3) + t(2, −1, 1)；L2: r = (1, −1, 0) + s(1, 1, 2)。(a) 證明 L1 與 L2 相交，並求交點及對應的 t、s。(b) 求兩條直線的夾角，取一位小數。

答案：答案：(a) 比較分量得 1 + 2t = 1 + s、2 − t = −1 + s、3 + t = 2s，解得 t = 1、s = 2，交點為 (3, 1, 4)。[4 分] (b) 兩方向向量的純量積為 3，兩者模均為 √6，故 cos θ = 3/6 = 0.5，θ = 60.0° 。[4 分]

10. （點到平面距離）平面 π 的方程為 2x − y + 2z = 10，點 A 為 (3, 1, 2)。(a) 寫出 π 的單位法向量。(b) 求 A 到 π 的距離。(c) 求 A 在 π 上的垂足坐標。

答案：答案：(a) 法向量 (2, −1, 2) 的模為 3，單位法向量 = (2/3, −1/3, 2/3)。[2 分] (b) 距離 = |2×3 − 1 + 2×2 − 10|/3 = 1/3 ≈ 0.333。[3 分] (c) 垂足 = A − (−1/9)(2, −1, 2) = (29/9, 8/9, 20/9) ≈ (3.222, 0.889, 2.222)。[3 分]

11. （向量積）設 a = 2i + 3j − k、b = i − j + 2k。(a) 求 a × b 及 |a × b|。(b) 求同時垂直於 a 與 b 的單位向量。(c) 求以 a、b 為兩邊的三角形面積，取三位小數。(d) 說明為何 a 與 a × b 的純量積必為零。

答案：答案：(a) a × b = (3×2 − (−1)×(−1), (−1)×1 − 2×2, 2×(−1) − 3×1) = (5, −5, −5)，|a × b| = 5√3 ≈ 8.660。[3 分] (b) 單位向量 = (1, −1, −1)/√3。[2 分] (c) 面積 = 5√3/2 ≈ 4.330。[2 分] (d) a × b 垂直於 a，故兩者純量積必為 0。[1 分]

12. （參數討論）考慮方程組 $x + y + kz = 1$、$x + ky + z = 1$、$kx + y + z = 1$。(a) 證明係數矩陣的行列式為 $-(k-1)^2(k+2)$。(b) 當 $k = -2$ 時，說明方程組無解。(c) 當 $k = 1$ 時，求通解。(d) 求方程組有唯一解時 k 的取值範圍。

答案：答案：(a) 展開行列式得 $-k^3 + 3k - 2 = -(k-1)^2(k+2)$。[3 分] (b) $k = -2$ 時三式相加左邊為 0、右邊為 3，矛盾，故無解。[2 分] (c) $k = 1$ 時三式同為 $x + y + z = 1$，通解為 $(1 - s - t, s, t)$，s、t 為任意實數。[2 分] (d) 行列式不為零即 k 不等於 1 亦不等於 -2 時，方程組有唯一解。[1 分]

TutorZone 中六（S6）數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。