DSE 數學

中六（S6）　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 12 題

甲部（Q1 – Q4）：行列式、逆矩陣與線性方程組（32 分）

矩陣與行列式：三階行列式展開、餘因式、逆矩陣、克拉瑪法則與方程組唯一解的條件。

1. （行列式）設 A 為三階方陣，第一行為 1、2、3，第二行為 0、4、5，第三行為 1、0、6。(a) 沿第一行展開求 det A。(b) 求 A 的第 (2,3) 個元素所對應的餘因式。(c) 求 det(3A)。

2. （逆矩陣）設 B 為二階方陣，第一行為 3、5，第二行為 1、2。(a) 求 det B 及 B^{-1}。(b) 用 B^{-1} 解方程組 $3x + 5y = 4$、$x + 2y = 1$。(c) 說明為何行列式為零的方陣沒有逆矩陣。

3. （線性方程組）解方程組 $x + 2y + z = 8$、$2x - y + 3z = 9$、$3x + y - z = 2$。(a) 求係數矩陣的行列式。(b) 用克拉瑪法則求 x、y、z。(c) 說明行列式不為零如何保證解唯一。

4. （矩陣乘法）設 A 為第一行 1、2、第二行 3、4 的二階方陣，B 為第一行 0、1、第二行 1、0 的二階方陣。(a) 求 AB 與 BA，並說明矩陣乘法不可交換。(b) 求 A^2。(c) 驗證 $\det(AB) = \det A \times \det B$。

乙部（Q5 – Q8）：矩陣性質、變換與向量運算（36 分）

矩陣運算與變換：乘法不可交換、行列式乘積性質、旋轉與反射矩陣、純量積與向量積。

5. （行列式性質）設 M 為三階方陣，第一行 2、0、1，第二行 1、3、2，第三行 0、1、1。(a) 求 det M。(b) 由此求 $\det(2M)$、$\det(M^2)$、$\det(M^{-1})$ 與 $\det(M^{\mathrm{T}})$。(c) 若 N 為三階方陣且 $\det N = 5$，求 $\det(MN)$ 及 $\det(N^{-1})$。

6. （變換矩陣）設 R 表示逆時針旋轉 90°，其第一行 0、−1，第二行 1、0；S 表示關於 y 軸的反射，其第一行 −1、0，第二行 0、1。(a) 求 RS，並描述合成變換的幾何效果。(b) 求點 (3, 4) 先經 S 再經 R 後的像。(c) 求 det(RS)，並說明它與面積變化的關係。

7. （純量積與投影）設 $\mathbf{a} = (1, 2, 2)$、$\mathbf{b} = (2, -2, 1)$、$\mathbf{c} = (3, 1, 5)$。(a) 證明 a 與 b 垂直，並求 $|\mathbf{a}|$ 與 $|\mathbf{b}|$。(b) 求 c 在 a 方向上的投影向量及投影長度。(c) 求 c 到直線 $\mathbf{r} = t\,\mathbf{a}$ 的最短距離，答案取三位小數。

8. （向量積與平面）設三點 P(1, 0, 2)、Q(3, 2, 1)、R(0, 1, 4)。(a) 求向量 PQ 與 PR，再求 $\mathrm{PQ} \times \mathrm{PR}$。(b) 求三角形 PQR 的面積，取三位小數。(c) 求通過 P、Q、R 的平面方程。(d) 求原點到該平面的距離，取三位小數。

丙部（Q9 – Q12）：空間直線、平面與參數討論（32 分）

空間幾何：直線相交與夾角、三點定平面、點到平面距離、含參數方程組的解的討論。

9. （空間直線）L1: $\mathbf{r} = (1, 2, 3) + t(2, -1, 1)$；L2: $\mathbf{r} = (1, -1, 0) + s(1, 1, 2)$。(a) 證明 L1 與 L2 相交，並求交點及對應的 t、s。(b) 求兩條直線的夾角，取一位小數。

10. （點到平面距離）平面 π 的方程為 $2x - y + 2z = 10$，點 A 為 $(3, 1, 2)$。(a) 寫出 π 的單位法向量。(b) 求 A 到 π 的距離。(c) 求 A 在 π 上的垂足坐標。

11. （向量積）設 $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$、$\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$。(a) 求 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 及 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$。(b) 求同時垂直於 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 的單位向量。(c) 求以 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 為兩邊的三角形面積，取三位小數。(d) 說明為何 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的純量積必為零。

12. （參數討論）考慮方程組 $x + y + kz = 1$、$x + ky + z = 1$、$kx + y + z = 1$。(a) 證明係數矩陣的行列式為 $-(k-1)^2(k+2)$。(b) 當 $k = -2$ 時，說明方程組無解。(c) 當 $k = 1$ 時，求通解。(d) 求方程組有唯一解時 k 的取值範圍。

TutorZone 中六（S6）數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。