DSE 數學練習卷：指數、對數與數列

中六（S6）　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 12 題

甲部　指數與對數

短答與計算題

1. 化簡下列各式（答案用分數或整數表示）：(a) $2^5 \times 2^{-8}$；(b) 27 的 2/3 次方；(c) 81 的 −1/2 次方。

答案：(a) $2^5 \times 2^{-8} = 2^{-3} = 1/8$。(b) $27^{(2/3)} = (3^3)^{(2/3)} = 3^2 = 9$。(c) $81^{(-1/2)} = 1 \div 81^{(1/2)} = 1 \div 9 = 1/9$。

2. 求下列各值：(a) $\log_2 32$；(b) $\log_3 (1/9)$；(c) 解方程 $\log_{10} x + \log_{10} 2 = 3$。

答案：(a) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$。(b) $\log_3 (1/9) = \log_3 3^{-2} = -2$。(c) $\log_{10} (2x) = 3$，故 $2x = 1000$，$x = 500$。

3. 解下列指數方程：(a) $2^{(x+1)} = 32$；(b) $5^{(2x)} = 125$；(c) 由此說明 (a) 與 (b) 的解在數線上哪一個較大。

答案：(a) $2^{(x+1)} = 2^5$，故 $x + 1 = 5$，$x = 4$。(b) $5^{(2x)} = 5^3$，故 $2x = 3$，$x = 3/2$。(c) 4 大於 1.5，所以 (a) 的解較大。

4. 某等差數列首項為 7，公差為 4。(a) 求第 20 項；(b) 求首 20 項之和；(c) 求首 n 項之和不小於 1000 的最小 n。

答案：(a) $T_{20} = 7 + 19 \times 4 = 83$。(b) $S_{20} = 20 \times (7 + 83) \div 2 = 900$。(c) $S_n = n(4n + 10) \div 2 = 2n^2 + 5n$；解 $2n^2 + 5n$ 不小於 1000，得最小 $n = 22$。

乙部　等差與等比數列

應用與情境題

5. 某等比數列首項為 3，公比為 2。(a) 求第 10 項；(b) 求首 10 項之和；(c) 判斷首 10 項之和的末位數字，並說明理由。

答案：(a) $T_{10} = 3 \times 2^9 = 1536$。(b) $S_{10} = 3 \times (2^{10} - 1) \div (2 - 1) = 3{,}069$。(c) 末位為 9；因 $3 \times 1023 = 3069$，個位由 3×3 得 9。

6. 某無限等比數列首項為 8，公比為 0.6。(a) 求第 3 項；(b) 說明該數列為何有無限和，並求無限和；(c) 求首 4 項之和。

答案：(a) $T_3 = 8 \times 0.6^2 = 2.88$。(b) 因公比的絕對值小於 1，無限和存在：$S_\infty = 8 \div (1 - 0.6) = 20$。(c) $S_4 = 8 \times (1 - 0.6^4) \div 0.4 = 8 \times 0.8704 \div 0.4 = 17.408$。

7. 某人存入 50,000 元，年利率 4%，每年複利一次，為期 3 年。(a) 求 3 年後的本利和；(b) 求利息總額；(c) 若改為單利，利息會少收多少？

答案：(a) 本利和 $= 50{,}000 \times 1.04^3 = 56{,}243.20$ 元。(b) 利息 $= 56{,}243.20 - 50{,}000 = 6{,}243.20$ 元。(c) 單利利息 $= 50{,}000 \times 4\% \times 3 = 6{,}000$ 元，故少收 243.20 元。

8. 一部機器原值 240,000 元，每年按 15% 折舊（餘額遞減法）。(a) 求 4 年後的價值；(b) 求這 4 年的總折舊額；(c) 求價值首次低於 150,000 元時的年數。

答案：(a) 4 年後價值 = 240,000 × 0.85⁴ = 125,281.50 元。(b) 總折舊額 = 240,000 − 125,281.50 = 114,718.50 元。(c) 第 3 年值 240,000 × 0.85³ = 147,390 元，已低於 150,000，故為第 3 年。

丙部　求和、複利與指數方程

綜合運算題

9. 求下列各和：(a) Σ（k 由 1 到 10）(3k − 2)；(b) Σ（k 由 1 到 8）2^(k−1)；(c) 比較兩者的增長方式。

答案：(a) 首項 1、末項 28、共 10 項：和 = 10 × (1 + 28) ÷ 2 = 145。(b) 首項 1、公比 2、共 8 項：和 = 1 × (2⁸ − 1) ÷ 1 = 255。(c) (a) 為等差和，隨項數線性增長；(b) 為等比和，隨項數指數增長。

10. 某等比數列第 3 項為 12，第 6 項為 96。(a) 求公比；(b) 求首項；(c) 求第 9 項。

答案：(a) $T_6 \div T_3 = r^3 = 8$，故 $r = 2$。(b) 首項 = 12 ÷ 2² = 3。(c) $T_9 = 3 \times 2^8 = 768$。

11. 某培養皿的細菌數目 N = 500 × 3^t，t 為小時。(a) 求 N = 40,500 時的 t；(b) 求 N = 4,500 時的 t；(c) 由 (a) 與 (b) 說明 t 每增加 1 小時，N 的變化。

答案：(a) 3^t = 81，故 t = 4。(b) 3^t = 9，故 t = 2。(c) 由 t = 2 到 t = 4 共 2 小時，N 由 4,500 增至 40,500 即 9 倍，故每小時乘 3。

12. 解方程 3^(2x) − 4 × 3^x + 3 = 0。（提示：設 y = 3^x）寫出全部實數解，並驗算其中一個解。

答案：設 y = 3^x，方程化為 y² − 4y + 3 = 0，即 (y − 1)(y − 3) = 0，故 y = 1 或 y = 3。由 3^x = 1 得 x = 0；由 3^x = 3 得 x = 1，即 x = 0 或 x = 1。驗算 x = 0：$3^0 - 4 \times 3^0 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$。

TutorZone 中六（S6）數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。