DSE 數學練習卷：指數、對數與數列

中六（S6）　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 12 題

甲部：指數與對數運算（第 1 至 4 題，共 24 分）

回答全部題目；計算題須列出公式、代入數值及單位，並在必要時取四位小數。

1. 化簡下列各題。(a) $2^3 \times 2^{-5}$，答案以分數表示。(b) $(3x^2)^3 \div 9x^4$。(c) 求 $\log_2 32$ 的值。（6 分）

答案：(a) $2^3 \times 2^{-5} = 2^{(3-5)} = 2^{-2} = 1/4$〔指數相加 1 分；答案 1 分〕 (b) $(3x^2)^3 = 27x^6$，除以 $9x^4$ 得 $3x^2$〔2 分〕 (c) $32 = 2^5$，故 $\log_2 32 = 5$〔指數式與對數式互換 1 分；答案 1 分〕

2. 解下列方程。(a) $\log_3 (x + 2) = 2$。(b) $2^{(x+1)} = 16$。（6 分）

答案：(a) $\log_3 (x + 2) = 2$ 即 $x + 2 = 3^2 = 9$，故 $x = 7$〔化成指數式 1 分；解方程 1 分；答案 1 分〕 (b) $16 = 2^4$，故 $x + 1 = 4$，$x = 3$〔同底比較 2 分；答案 1 分〕

3. 已知 $\log 2 = 0.3010$ 及 $\log 3 = 0.4771$（四位小數）。(a) 求 $\log 12$。(b) 求 $\log 1.5$。(c) 求 $\log 8$。（6 分）

答案：(a) $\log 12 = \log(2^2 \times 3) = 2\log 2 + \log 3 = 0.6020 + 0.4771 = 1.0791$〔1 分〕 (b) $\log 1.5 = \log(3 \div 2) = 0.4771 - 0.3010 = 0.1761$〔1 分〕 (c) $\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2 = 0.9030$〔1 分，須寫四位小數〕

4. (a) 解 $3^{(2x)} = 27^{(x-1)}$。(b) 求 $\log_5 (1/25)$ 的值。（6 分）

答案：(a) $27 = 3^3$，故 $3^{(2x)} = 3^{(3x-3)}$，比較指數得 $2x = 3x - 3$，$x = 3$〔2 分；答案 1 分〕 (b) $1/25 = 5^{-2}$，故 $\log_5 (1/25) = -2$〔1 分；答案 2 分，須為負數〕

乙部：等差與等比數列（第 5 至 8 題，共 32 分）

解方程須寫出關鍵步驟，並檢查答案是否在定義域之內。

5. 等差數列首項為 7，公差為 -3。(a) 求通項 $T(n)$。(b) 求 $T(10)$。(c) 求首 15 項之和 $S(15)$。(d) 求首個負項。（8 分）

答案：(a) $T(n) = 7 + (n-1)(-3) = 10 - 3n$〔2 分〕 (b) $T(10) = 10 - 30 = -20$〔2 分〕 (c) $S(15) = 15/2 \times (2 \times 7 + 14 \times (-3)) = 7.5 \times (-28) = -210$〔公式 1 分；代入 1 分；答案 1 分〕 (d) 令 $10 - 3n$ 小於 0 得 n 大於 $10/3$，故首個負項為 $T(4) = -2$〔1 分〕

6. 等比數列首項為 3，公比為 2。(a) 寫出通項 $T(n)$。(b) 求 $T(8)$。(c) 求 $S(10)$。(d) 求最小 n 使 $T(n)$ 大於 1000。（8 分）

答案：(a) $T(n) = 3 \times 2^{(n-1)}$〔2 分〕 (b) $T(8) = 3 \times 2^7 = 384$〔2 分〕 (c) $S(10) = 3(2^{10} - 1)/(2 - 1) = 3 \times 1023 = 3069$〔2 分〕 (d) $3 \times 2^{(n-1)}$ 大於 1000 即 $2^{(n-1)}$ 大於 333.3，$n - 1 \geqslant 9$，故 $n = 10$（$T(10) = 1536$）〔2 分〕

7. 等比數列首項為 8，公比為 3/4。(a) 求無限和 $S(\infty)$。(b) 求 $T(4)$。(c) 求 $S(5)$。(d) 寫出公比須滿足的條件，使無限和存在。（8 分）

答案：(a) $S(\infty) = 8 \div (1 - 3/4) = 8 \div 1/4 = 32$〔2 分〕 (b) $T(4) = 8 \times (3/4)^3 = 8 \times 27/64 = 27/8 = 3.375$〔2 分〕 (c) $S(5) = 8(1 - (3/4)^5) \div (1/4) = 32 \times 0.762695\ldots = 781/32 \approx 24.41$〔2 分〕 (d) 公比的絕對值小於 1，即 -1 小於 r 小於 1〔2 分〕

8. 某市人口為 200 000，每年增長 5%。(a) 寫出 n 年後人口的表示式。(b) 求 5 年後人口（取整數）。(c) 求最小 n 使人口超過 300 000。（8 分）

答案：(a) $P(n) = 200\,000 \times 1.05^n$〔2 分〕 (b) $P(5) = 200\,000 \times 1.05^5 = 255\,256.3$，即約 255 256 人〔2 分；取整 1 分〕 (c) 1.05^n 大於 1.5，取對數得 n 大於 8.31，故 $n = 9$〔2 分；答案 1 分〕

丙部：方程、應用與論述（第 9 至 12 題，共 44 分）

應用題須說明所用的數列或函數模型，並以完整句子解釋結論。

9. (a) 解 $4^x - 5(2^x) + 4 = 0$。 (b) 解 $\log x + \log(x - 3) = 1$。 **（10 分）**

答案：(a) 設 $y = 2^x$，方程化為 $y^2 - 5y + 4 = 0$，$y = 1$ 或 4，故 $x = 0$ 或 2〔代換 2 分；解二次 2 分；答案 1 分〕 (b) $\log[x(x-3)] = 1$ 即 $x^2 - 3x - 10 = 0$，$x = 5$ 或 -2；因對數定義域須 x 大於 3，故 $x = 5$（-2 捨去）〔方程 2 分；解 1 分；捨根 1 分；答案 1 分〕

10. 禮堂第一排有 15 個座位，其後每排比前一排多 2 個，共 20 排。(a) 求第 20 排座位數。 (b) 求全場座位總數。 (c) 若場地最多容納 700 人，20 排是否足夠？並求最多可設的排數。 **（10 分）**

答案：(a) 第 20 排 $= 15 + 19 \times 2 = 53$ 個座位〔3 分〕 (b) $S(20) = 20/2 \times (15 + 53) = 10 \times 68 = 680$〔4 分〕 (c) 20 排提供 680 座，少於 700，足夠；$S(21) = 21/2 \times (15 + 55) = 735$ 已超上限，故最多 20 排〔判斷 1 分；計算 2 分〕

11. 數列 $5, 15, 45, \ldots$ (a) 證明此數列為等比數列，並求 $T(6)$。 (b) 求 $S(6)$。 (c) 求最小 n 使 $S(n)$ 大於 5000。 **（12 分）**

答案：(a) $15 \div 5 = 3$，$45 \div 15 = 3$，公比固定為 3，故為等比數列；$T(6) = 5 \times 3^5 = 1215$〔證明 2 分；答案 2 分〕 (b) $S(6) = 5(3^6 - 1)/(3 - 1) = 5 \times 728 \div 2 = 1820$〔3 分〕 (c) $5(3^n - 1)/2$ 大於 5000 即 3^n 大於 2001；$3^7 = 2187$ 已足夠，故 $n = 7$（$S(7) = 5465$）〔不等式 2 分；試算 2 分；答案 1 分〕

12. 某放射性樣本質量 80 mg，半衰期為 6 小時。(a) 寫出 t 小時後質量 $m(t)$ 的表示式。 (b) 求 18 小時後的質量。 (c) 求最少多少個整數小時後，質量低於 5 mg。 **（12 分）**

答案：(a) $m(t) = 80 \times (1/2)^{(t/6)}$〔3 分〕 (b) $m(18) = 80 \times (1/2)^3 = 80 \div 8 = 10$ mg〔4 分〕 (c) $80 \times (1/2)^{(t/6)}$ 小於 5 即 $(1/2)^{(t/6)}$ 小於 $1/16$，故 $t/6$ 大於 4，t 大於 24；最少 25 小時〔不等式 2 分；對數或試算 2 分；答案 1 分〕

TutorZone 中六（S6）數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。