DSE 數學

中六（S6）　數學　|　時限：75 分鐘　|　總分：100 分　|　共 12 題

甲部（32 分）

解方程、判別式、配方法與根與係數的關係，須列出步驟及化簡過程。

1. 解下列各二次方程。 (a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (b) $2x^2 + 3x - 2 = 0$ (c) $x^2 + 4x + 1 = 0$（答案以根式表示）

答案：$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) = 0$，故 $x = 2$ 或 $x = 3$。 (b) 判別式 = 判別式 $= 3^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$；$x = (-3 \pm 5)/4$，故 $x = 1/2$ 或 $x = -2$。 (c) 判別式 $= 4^2 - 4(1)(1) = 12$；$x = (-4 \pm \sqrt{12})/2 = -2 \pm \sqrt{3}$。

2. 設 k 為常數。 (a) 若 $x^2 + kx + 9 = 0$ 有兩個相等實根，求 k 的兩個可能值。 (b) 判斷 $2x^2 - 4x + 5 = 0$ 的根的性質，並說明理由。

答案：(a) 有相等實根須判別式 $= 0$：$k^2 - 4(1)(9) = 0$，即 $k^2 = 36$，故 $k = 6$ 或 $k = -6$。 (b) 判別式 $= (-4)^2 - 4(2)(5) = 16 - 40 = -24$，小於 0，故方程沒有實根，兩根為一對共軛複數。

3. 已知 $y = x^2 - 6x + 5$。 (a) 以配方法把 y 寫成 $(x - h)^2 + k$ 的形式。 (b) 寫出圖像的頂點及對稱軸。 (c) 求 y 的最小值及其對應的 x 值。

答案：(a) $y = x^2 - 6x + 5 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$。 (b) 頂點為 $(3, -4)$，對稱軸為直線 $x = 3$。 (c) 因 $(x - 3)^2 \geqslant 0$，故 $y \geqslant -4$；最小值為 -4，於 $x = 3$ 時取得。

4. 設 α 及 β 為方程 $3x^2 - 5x - 2 = 0$ 的兩個根。 (a) 求 $\alpha + \beta$ 及 $\alpha\beta$。 (b) 求 $\alpha^2 + \beta^2$ 的值。 (c) 求以 $\alpha + 1$ 及 $\beta + 1$ 為根的二次方程，並以整係數表示。

答案：(a) $\alpha + \beta = 5/3$，$\alpha\beta = -2/3$。 (b) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 25/9 + 4/3 = 37/9$。 (c) 新根之和 $= 5/3 + 2 = 11/3$，新根之積 $= \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 = -2/3 + 5/3 + 1 = 2$；故所求方程為 $x^2 - (11/3)x + 2 = 0$，即 $3x^2 - 11x + 6 = 0$。

乙部（36 分）

函數圖像、二次不等式、圖像特徵與應用題，須清楚說明理由。

5. 已知 $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$。 (a) 把 $f(x)$ 寫成 $a(x - h)^2 + k$ 的形式。 (b) 描述 $y = f(x)$ 的圖像如何由 $y = 2x^2$ 的圖像經平移得出。 (c) 解方程 $f(x) = 3$。

答案：(a) $f(x) = 2(x^2 - 4x) + 3 = 2[(x - 2)^2 - 4] + 3 = 2(x - 2)^2 - 5$。 (b) 把 $y = 2x^2$ 的圖像向右平移 2 單位、向下平移 5 單位，即得 $y = f(x)$ 的圖像；頂點由 $(0, 0)$ 移至 $(2, -5)$。 (c) $2(x - 2)^2 - 5 = 3$，即 $(x - 2)^2 = 4$，故 $x - 2 = \pm 2$，即 $x = 4$ 或 $x = 0$。

6. 解下列二次不等式。 (a) $x^2 - x - 6 \leqslant 0$ (b) $2x^2 + 5x - 3 > 0$

答案：(a) $(x - 3)(x + 2) \leqslant 0$，臨界值為 -2 及 3，故解為 $-2 \leqslant x \leqslant 3$。 (b) $2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3) > 0$，臨界值為 -3 及 $1/2$，故解為 x 小於 -3 或 x 大於 $1/2$。

7. 已知曲線 $y = x^2 - 4x + 3$。 (a) 求圖像與 x 軸及 y 軸的交點。 (b) 求圖像的頂點。 (c) 判斷圖像的開口方向，並寫出 y 的最小值。

答案：(a) 令 $y = 0$：$(x - 1)(x - 3) = 0$，x 軸交點為 $(1, 0)$ 及 $(3, 0)$；令 $x = 0$，得 y 軸交點 $(0, 3)$。 (b) $y = (x - 2)^2 - 1$，故頂點為 $(2, -1)$。 (c) x^2 的係數為正（$1 > 0$），圖像開口向上；最小值為 -1，於 $x = 2$ 時取得。

8. 一個長方形花園的周界為 40 m，面積為 96 m²。(a) 設花園的闊為 x m，以 x 表示它的長。(b) 建立一個關於 x 的二次方程。(c) 求花園的長和闊。

答案：(a) 長 + 闊 = 40 ÷ 2 = 20，故長為 (20 − x) m。(b) 面積 = x(20 − x) = 96，即 $x^2 - 20x + 96 = 0$。(c) $(x - 8)(x - 12) = 0$，故 x = 8 或 x = 12；花園的尺寸為 12 m × 8 m（核對：周界 = 40 m，面積 = 96 m²）。

丙部（32 分）

聯立方程、等根條件、最值應用與由根與係數反求參數，須寫出完整過程。

9. 解聯立方程：$y = x + 1$ 及 $y = x^2 - 1$。

答案：由兩式得 $x^2 - 1 = x + 1$，即 $x^2 - x - 2 = 0$，亦即 $(x - 2)(x + 1) = 0$，故 x = 2 或 x = −1。當 x = 2，y = 3；當 x = −1，y = 0。解為 (2, 3) 及 (−1, 0)。

10. 已知方程 $x^2 + (k - 2)x + 9 = 0$ 有兩個相等實根，其中 k 為常數。(a) 建立一個關於 k 的方程。(b) 求 k 的所有可能值。(c) 就每個 k 值寫出對應方程及其重根。

答案：(a) 判別式 $= (k - 2)^2 - 4(1)(9) = 0$，即 $(k - 2)^2 = 36$。(b) $k - 2 = \pm 6$，故 k = 8 或 k = −4。(c) 當 k = 8，方程為 $x^2 + 6x + 9 = 0$，即 $(x + 3)^2 = 0$，重根為 x = −3；當 k = −4，方程為 $x^2 - 6x + 9 = 0$，即 $(x - 3)^2 = 0$，重根為 x = 3。

11. 某店售賣一款產品：當售價為 $p 時，每月可售出 (120 − 2p) 件。(a) 以 p 表示每月的收入 R。(b) 以配方法求 R 的最大值。(c) 求使收入達到最大的售價，並求此時售出的件數。

答案：(a) $R = p(120 - 2p) = -2p^2 + 120p$。(b) $R = -2(p^2 - 60p) = -2[(p - 30)^2 - 900] = -2(p - 30)^2 + 1800$；因 $(p - 30)^2 \geqslant 0$，故 $R \leqslant 1800$，即最大收入為 $1,800。(c) 最大值於 p = 30 時取得，故售價為 $30；此時售出 120 − 60 = 60 件，收入 30 × 60 = $1,800。

12. 設 α 及 β 為方程 $x^2 - 7x + k = 0$ 的兩個根，其中 k 為常數。已知 $\alpha^2 + \beta^2 = 25$。(a) 以 k 表示 $\alpha^2 + \beta^2$。(b) 求 k。(c) 由此求 α 及 β。

答案：(a) $\alpha + \beta = 7$，$\alpha\beta = k$，故 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 49 - 2k$。(b) $49 - 2k = 25$，即 $2k = 24$，故 k = 12。(c) 方程為 $x^2 - 7x + 12 = 0$，即 $(x - 3)(x - 4) = 0$，故 α 及 β 為 3 及 4（核對：3 + 4 = 7，$3^2 + 4^2 = 25$）。

TutorZone 中六（S6）數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。