DSE 數學

中六（S6）　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：50 分　｜　共 12 題

甲部（Q1 – Q6）：三角學

回答下列各題，須列出計算步驟。

1. 在直角三角形 ABC 中，$\angle C = 90^\circ$，AB = 17 cm，BC = 8 cm。(a) 求 AC 的長度。(b) 以分數表示 sin A、cos A 及 tan A。

答案：(a) $AC^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$，故 AC = 15 cm。（2 分）(b) $\sin A = BC \div AB = 8/17$，$\cos A = AC \div AB = 15/17$，$\tan A = BC \div AC = 8/15$。（2 分）

2. 不使用計算機，求 $(\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \tan 45^\circ) \div \sin^2 45^\circ$ 的值。

答案：$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = 1/2$，$\tan 45^\circ = 1$，$\sin^2 45^\circ = 1/2$。（2 分）分子 $= 1/4 + 1 = 5/4$，故原式 $= (5/4) \div (1/2) = 5/2$。（2 分）

3. 三角形的三邊長為 7 cm、8 cm 及 9 cm。求最大角的大小，準確至 0.1°。

答案：最大角對最長邊 9 cm。由餘弦定理，$\cos C = (7^2 + 8^2 - 9^2) \div (2 \times 7 \times 8) = 32 \div 112 = 2/7$。（2 分）$C = 73.4^\circ$，準確至 0.1°。（2 分）

4. 三角形其中兩邊長 6 cm 及 10 cm，夾角為 30°。(a) 求該三角形的面積。(b) 求第三邊的長度，準確至 3 位有效數字。

答案：(a) 面積 $= (1/2) \times 6 \times 10 \times \sin 30^\circ = 15\ \text{cm}^2$。（2 分）(b) 第三邊$^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos 30^\circ = 136 - 60\sqrt{3} \approx 32.08$，故第三邊 ≈ 5.66 cm。（2 分）

5. 解方程 $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$，其中 $0^\circ \leqslant x \leqslant 360^\circ$。

答案：設 $u = \sin x$，得 $2u^2 + u - 1 = 0$，即 $(2u - 1)(u + 1) = 0$，$u = 1/2$ 或 $u = -1$。（2 分）$\sin x = 1/2$ 得 $x = 30^\circ$ 或 150°；$\sin x = -1$ 得 $x = 270^\circ$。解為 30°、150° 及 270°。（2 分）

6. 在水平地面上，由 A 點測得塔頂的仰角為 30°。由 A 向塔走 40 m 到達 B 點，測得仰角為 60°。求塔高，準確至 0.1 m。

答案：設塔高 h m，塔腳為 T。$AT = h \div \tan 30^\circ = h\sqrt{3}$，$BT = h \div \tan 60^\circ = h \div \sqrt{3}$。（2 分）$AT - BT = 40$，即 $h(\sqrt{3} - 1/\sqrt{3}) = 40$，得 $h = 20\sqrt{3} \approx 34.6$ m。（2 分）

乙部（Q7 – Q9）：坐標幾何

回答下列各題，須以坐標幾何方法作答。

7. 已知 A(−2, 3) 及 B(4, −5)。(a) 求 AB 的長度。(b) 求 AB 中點的坐標。(c) 求直線 AB 的斜率。

答案：(a) $AB = \sqrt{[(4 + 2)^2 + (-5 - 3)^2]} = \sqrt{(36 + 64)} = 10$。（2 分）(b) 中點 $= ((-2 + 4) \div 2, (3 - 5) \div 2) = (1, -1)$，斜率 $= (-5 - 3) \div (4 + 2) = -4/3$。（2 分）

8. 直線 L 的方程為 $3x + 4y - 12 = 0$。(a) 求 L 的 x 截距及 y 截距。(b) 求點 $(2, 1)$ 與 L 的距離。

答案：(a) 令 $y = 0$ 得 $x = 4$；令 $x = 0$ 得 $y = 3$，故 x 截距為 4，y 截距為 3。（2 分）(b) 距離 $= |3(2) + 4(1) - 12| \div \sqrt{(3^2 + 4^2)} = 2 \div 5 = 0.4$。（2 分）

9. 圓 C 的方程為 $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$。(a) 求圓心及半徑。(b) 判斷點 $(3, 2)$ 在圓內、圓上還是圓外。

答案：(a) $x^2 - 6x + y^2 + 8y = 11$，配方得 $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 11 + 9 + 16 = 36$，圓心 $(3, -4)$，半徑 6。（2 分）(b) 點 $(3, 2)$ 與圓心的距離 $= \sqrt{(0^2 + 6^2)} = 6$，等於半徑，故點在圓上。（2 分）

丙部（Q10 – Q12）：綜合應用

回答下列各題，須解釋推論並列出步驟。

10. 直線 $3x + 4y = 25$ 與圓 $x^2 + y^2 = 25$ 有多少個交點？若只有一個交點，求該點的坐標。

答案：圓心 $(0, 0)$ 到直線 $3x + 4y - 25 = 0$ 的距離 $= 25 \div \sqrt{(9 + 16)} = 25 \div 5 = 5$，等於半徑，故直線與圓相切，只有一個交點。（3 分）切點為 $(3, 4)$：$3(3) + 4(4) = 25$ 且 $3^2 + 4^2 = 25$，兩式均成立。（2 分）

11. (a) 證明 $(1 - \cos^2\theta) \div (\sin\theta \cos\theta) = \tan\theta$。(b) 已知 $\tan\theta = 3/4$ 且 θ 為銳角，求 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$。

答案：(a) 左邊 $= (1 - \cos^2\theta) \div (\sin\theta \cos\theta) = \sin^2\theta \div (\sin\theta \cos\theta) = \sin\theta \div \cos\theta = \tan\theta$。（3 分）(b) 由 $\tan\theta = 3/4$ 且 θ 為銳角，取對邊 3、鄰邊 4、斜邊 5，得 $\sin\theta = 3/5$，$\cos\theta = 4/5$。（2 分）

12. 兩艘船同時由燈塔 O 出發，$OA = 12$ km，$OB = 9$ km，$\angle AOB = 120^\circ$。(a) 求 AB 的距離。(b) 求三角形 OAB 的面積，準確至 3 位有效數字。

答案：(a) $AB^2 = 12^2 + 9^2 - 2 \times 12 \times 9 \times \cos 120^\circ = 225 + 108 = 333$，故 $AB = \sqrt{333} \approx 18.2$ km。（2 分）(b) 面積 $= (1/2) \times 12 \times 9 \times \sin 120^\circ = 54 \times (\sqrt{3} \div 2) \approx 46.8$ km²。（2 分）

TutorZone 中六（S6）數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。