DSE 數學練習卷：三角學與座標幾何

中六（S6）　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 12 題

甲部：三角比與座標基礎（第 1 至 4 題，共 24 分）

回答全部題目；計算題須寫出公式、代入數值及單位，除特別指明外答案取三位有效數字。

1. 在三角形 ABC 中，$\angle C = 90^\circ$，AB = 13 cm，BC = 5 cm。(a) 求 AC 的長度。(b) 求 $\sin A$ 及 $\tan A$ 的值（以最簡分數表示）。(c) 求 $\angle A$，答案取三位有效數字。（6 分）

答案：$AC = \sqrt{(13^2 - 5^2)} = \sqrt{144} = 12$ cm（2 分）。$\sin A = BC/AB = 5/13$，$\tan A = BC/AC = 5/12$（2 分；只寫小數而無分數扣 1 分）。$\angle A = \tan^{-1}(5/12) = 22.6^\circ$（2 分；用 $\sin^{-1} 0.3846$ 得同值亦給分）。

2. 在三角形 ABC 中，a = 8 cm，b = 11 cm，$\angle C = 65^\circ$。(a) 用餘弦定理求 c 的長度。(b) 用正弦定理求 $\angle A$，答案取三位有效數字。（6 分）

答案：$c^2 = 8^2 + 11^2 - 2(8)(11)\cos 65^\circ = 185 - 176(0.4226) = 110.6$（2 分），c = 10.5 cm（1 分；漏開方只得 2 分）。$\sin A = 8 \sin 65^\circ / 10.5 = 0.6894$（2 分），$\angle A = 43.6^\circ$（1 分；另一解 $180^\circ - 43.6^\circ$ 因 b 大於 a 而被捨去）。

3. 一個扇形的半徑為 12 cm，圓心角為 1.8 弧度。(a) 求弧長。(b) 求扇形面積。(c) 把 1.8 弧度化為度，答案取三位有效數字。（6 分）

答案：弧長 $= r\theta = 12 \times 1.8 = 21.6$ cm（2 分）。面積 $= \tfrac{1}{2} r^2\theta = 0.5 \times 144 \times 1.8 = 129.6$ cm²（2 分；漏 ½ 得 0 分）。$1.8 \times 180/\pi = 103.1^\circ$（2 分；用 3.14 取 π 得 103.2° 給 1 分）。

4. 已知 A(−3, 4) 及 B(5, −2)。(a) 求 AB 的長度。(b) 求 AB 的中點坐標。(c) 求直線 AB 的方程，並以一般式 $ax + by + c = 0$ 表示。（6 分）

答案：$AB = \sqrt{((5+3)^2 + (-2-4)^2)} = \sqrt{(64 + 36)} = 10$（2 分）。中點 $= ((-3+5)/2, (4-2)/2) = (1, 1)$（1 分）。斜率 $= (-2-4)/(5+3) = -3/4$（1 分），故 $3x + 4y - 7 = 0$（2 分；化簡後常數項錯誤扣 1 分）。

乙部：圓方程、三角方程與直線（第 5 至 8 題，共 32 分）

解方程須列出所有在指定範圍內的答案；捨去不合理解時須說明理由。

5. 圓 C 的方程為 $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0$。(a) 求圓心及半徑。(b) 證明點 P(3, −1) 在圓 C 上。(c) 求圓 C 在 P 點的切線方程。（8 分）

答案：$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 3^2 + 5^2 - 18 = 16$，故圓心 (3, −5)、半徑 4（3 分；配方法正確但半徑漏開方扣 1 分）。代入 P：$9 + 1 - 18 - 10 + 18 = 0$，故 P 在圓上（2 分）。半徑 CP 垂直，圓心 (3, −5) 與 P(3, −1) 的 x 坐標相同，半徑為鉛直線，故切線為水平線 $y = -1$（3 分）。

6. 解方程 $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$，其中 $0^\circ \leqslant x \leqslant 360^\circ$。(a) 把方程化為 $\sin x$ 的二次方程。(b) 解出範圍內全部答案。（8 分）

答案：由 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 得 $2 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 3 = 0$（2 分），即 $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$（1 分），$(2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$（2 分）。$\sin x = 1/2$ 得 $x = 30^\circ$、150°；$\sin x = 1$ 得 $x = 90^\circ$（2 分；漏一解扣 1 分）。故 $x = 30^\circ$、90°、150°（1 分）。

7. 已知函數 $y = 3\sin 2x + 1$。(a) 寫出振幅、週期、最大值及最小值。(b) 解 $3\sin 2x + 1 = 2.5$，其中 $0^\circ \leqslant x \leqslant 180^\circ$。（8 分）

答案：振幅 3（1 分），週期 $360^\circ / 2 = 180^\circ$（1 分），最大值 $3 + 1 = 4$（1 分），最小值 $-3 + 1 = -2$（1 分）。$3\sin 2x = 1.5$，$\sin 2x = 0.5$（1 分），$2x = 30^\circ$ 或 150°（2 分），$x = 15^\circ$ 或 75°（1 分）。

8. 已知直線 L：$4x - 3y + 5 = 0$ 及點 P(2, 7)。(a) 求 P 到 L 的垂直距離。(b) 求過 P 且垂直於 L 的直線方程。(c) 求 P 在 L 上的垂足坐標。（8 分）

答案：$d = |4(2) - 3(7) + 5| / \sqrt{(4^2 + 3^2)} = |-8| / 5 = 1.6$（2 分；分子漏絕對值扣 1 分）。L 的斜率為 4/3（1 分），垂直斜率 −3/4（1 分），故 $y - 7 = -(3/4)(x - 2)$，即 $3x + 4y - 34 = 0$（2 分）。解聯立得垂足 (3.28, 6.04)（2 分；與 (a) 距離一致性可作檢查）。

丙部：立體三角與綜合應用（第 9 至 12 題，共 44 分）

證明題須逐步寫出理由；應用題須先定義所用變數，並寫出所作假設。

9. 一個長方體的長、闊、高分別為 12 cm、9 cm 及 8 cm。(a) 求底面對角線的長度。(b) 求空間對角線的長度。(c) 求空間對角線與底面所成的角。(d) 求底面對角線與 12 cm 那條邊所成的角。（10 分）

答案：底面對角線 $= \sqrt{(12^2 + 9^2)} = 15$ cm（2 分）。空間對角線 $= \sqrt{(15^2 + 8^2)} = 17$ cm（2 分）。$\tan\theta = 8/15$，$\theta = 28.1^\circ$（3 分；誤用 sin 或 cos 得 0 分）。$\tan\varphi = 9/12$，$\varphi = 36.9^\circ$（3 分）。

10. 設 $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$。(a) 把 $f(x)$ 寫成 $R\sin(x + \alpha)$ 的形式，其中 R 為正數、α 介於 0° 及 90° 之間。(b) 求 $f(x)$ 的最大值及此時 x 的值。(c) 解 $f(x) = 2$，其中 $0^\circ \leqslant x \leqslant 360^\circ$。（11 分）

答案：$R = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = 5$（1 分），$\tan\alpha = 4/3$ 得 $\alpha = 53.1^\circ$（2 分），故 $f(x) = 5\sin(x + 53.1^\circ)$（1 分）。最大值 5（1 分），此時 $x + 53.1^\circ = 90^\circ$，$x = 36.9^\circ$（2 分）。$\sin(x + 53.1^\circ) = 0.4$（1 分），$x + 53.1^\circ = 23.6^\circ$ 或 156.4° 或 383.6° 或 516.4°（2 分），在範圍內 $x = 103.3^\circ$ 或 330.4°（1 分）。

11. 已知三點 A(1, 2)、B(7, 4) 及 C(5, 10)。(a) 證明 AB = BC 且 $\angle ABC = 90^\circ$。(b) 求三角形 ABC 的外心坐標及外接圓半徑。(c) 求外接圓的方程。（11 分）

答案：$AB^2 = 6^2 + 2^2 = 40$，$BC^2 = (-2)^2 + 6^2 = 40$，故 AB = BC（2 分）。$AC^2 = 4^2 + 8^2 = 80$，而 $40 + 40 = 80$，由勾股定理的逆定理得 $\angle ABC = 90^\circ$（3 分）。直角三角形的外心為斜邊 AC 的中點，即 (3, 6)（2 分），半徑 $= AC/2 = 4.47$（1 分）。外接圓：$(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 20$（3 分）。

12. 在水平地面上，A 點測得塔頂的仰角為 32°；由 A 向塔底方向直行 25 m 到達 B 點，測得塔頂的仰角為 47°。設 A 與塔底的水平距離為 x m。(a) 以 x 建立求塔高的方程。(b) 求塔高。(c) 求 B 與塔頂的距離。(d) 寫出計算所依據的其中一個假設。（12 分）

答案：$h = x\tan 32^\circ$，且 $h = (x - 25)\tan 47^\circ$（3 分），故 $x\tan 32^\circ = (x - 25)\tan 47^\circ$（1 分）。解得 $x = 59.91$ m（1 分），塔高 $h = 37.4$ m（3 分；只寫出公式而無解方程最多 2 分）。B 與塔底的水平距離 $= 59.91 - 25 = 34.91$ m，與塔頂距離 $= \sqrt{(34.91^2 + 37.4^2)} = 51.2$ m（3 分）。假設塔身鉛直、地面水平，且 A、B、塔底在同一直線上（2 分；其他合理假設如忽略儀器高度亦給分）。

TutorZone 中六（S6）數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。