HKDSE 數學延伸部分單元一

中四至中六（HKDSE）　數學（延伸單元一）　|　時限：150 分鐘　|　總分：100 分　|　共 8 題

甲部：二項式、指數與對數、求導與積分（50 分）

結構題：須寫出完整步驟、代入過程及單位；概率答案須先寫分佈及參數。全卷 8 題，共 100 分，時限 2 小時 30 分，可使用計算機。

1. (a) 將 $(1 + 2x)^7$ 展開至 x^3 項（即列出常數項至 x^3 的係數）。

(b) 求 $(1 - 3x)^9$ 展開式中 x^4 的係數。

答案：答案：(a) 由二項式定理，係數為 C(7,k)·2^k：x^0 = 1、x^1 = 14、x^2 = 84、x^3 = 280，故 $(1 + 2x)^7$ = 1 + 14x + 84x^2 + 280x^3 + ⋯。(b) 一般項為 C(9,r)(−3x)^r，取 r = 4：C(9,4) × $(-3)^4$ = 126 × 81 = 10206。（評分要點：須寫出二項式一般項；只寫答案而無展開步驟最多得一半分）

2. (a) 解方程 $2^{x+1} = 5^{2x}$，答案準確至 3 位有效數字。

(b) 解方程 $\log_2 x + \log_2 (x - 3) = 2$，並說明為何要捨去其中一個根。

答案：答案：(a) 兩邊取自然對數：$(x + 1)\ln 2 = 2x \cdot \ln 5$，整理得 $x(2\ln 5 - \ln 2) = \ln 2$，故 $x = \ln 2 \div (2\ln 5 - \ln 2) \approx 0.2744 \approx 0.274$。(b) 合併對數：$\log_2 [x(x - 3)] = 2$，即 $x^2 - 3x = 4$，$x^2 - 3x - 4 = 0$，$(x - 4)(x + 1) = 0$，得 $x = 4$ 或 $x = -1$；因對數要求 $x > 3$，故捨去 $x = -1$，答案 $x = 4$。（評分要點：漏寫定義域檢查扣 2 分）

3. 設 $y = x^2 e^{3x}$。

(a) 求 dy/dx，並以乘積法則及連鎖法則說明步驟。

(b) 求曲線在 $x = 1$ 處的切線方程，答案以 e 表示。

答案：答案：(a) 設 u = x^2、v = e^3x，u′ = 2x、v′ = 3e^3x；dy/dx = 2x · e^3x + x^2 · 3e^3x = e^3x(2x + 3x^2)。(b) x = 1 時 y = e^3，斜率 = $e^3(2 + 3) = 5e^3 = 100.4$；切線：$y - e^3 = 5e^3(x - 1)$，即 $y = 5e^3 x - 4e^3$（y 截距 $-4e^3 = 20.1$）。（評分要點：漏乘 v′ 只得一半分；切線須用點斜式並化簡）

4. 曲線 $y = x^2 - x - 2$ 與 x 軸相交於 A、B 兩點。

(a) 求 A、B 的坐標。

(b) 求曲線與 x 軸所圍成的區域面積，答案以分數表示。

答案：答案：(a) 令 $x^2 - x - 2 = 0$，$(x - 2)(x + 1) = 0$，故 A(−1, 0)、B(2, 0)。(b) 面積 = $|\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)dx|$，原函數為 $x^3/3 - x^2/2 - 2x$；代入 2 得 -3.3333，代入 −1 得 1.1667，面積 = |-3.3333 − (1.1667)| = 4.5000 = 9/2 平方單位。（評分要點：須寫出原函數及上下限；漏絕對值而負數作答扣 2 分）

乙部：數值積分、離散與連續概率分佈（50 分）

結構題：須寫出完整步驟、代入過程及單位；概率答案須先寫分佈及參數。全卷 8 題，共 100 分，時限 2 小時 30 分，可使用計算機。

5. 下表為函數 f(x) 在五個點的取值：x = 0、0.5、1.0、1.5、2.0 時，f(x) 分別為 1.000、1.284、1.649、2.117、2.718。

(a) 用梯形法則（5 個測點、4 個小區間）估算 $\int_0^2 f(x)\,dx$，答案準確至 3 位小數。

(b) 說明若把區間數目加倍，估算值一般會如何改變，並指出梯形法則的誤差方向。

答案：答案：(a) 步長 h = 0.5，梯形法則：$h/2 \times [f_0 + f_4 + 2(f_1 + f_2 + f_3)]$，= 0.25 × [1.000 + 2.718 + 2 × (1.284 + 1.649 + 2.117)] = 0.25 × 13.818 = 3.4545 ≈ 3.454。(b) 區間數目加倍（h 減半）時，梯形法則為二階方法，誤差約按 1/4 縮小，估算值會趨近真值；對上凸或下凹曲線其誤差有固定方向（凸向下時偏低、凸向上時偏高），故不能一概而論。（評分要點：須寫出加權 2 的中間項；只寫公式未代數值扣 2 分）

6. 設隨機變數 X 服從二項分佈 B(20, 0.3)。

(a) 求 P(X = 6)，答案準確至 4 位小數。

(b) 求 P(X ⩾ 2)，並寫出 E(X) 及 Var(X)。

答案：答案：(a) $P(X=6) = C(20,6)(0.3)^6(0.7)^{14} = 38760 \times 0.000729 \times 0.0067822 \approx 0.1916$。(b) P(X ⩾ 2) = 1 − P(X = 0) − P(X = 1) = 1 − 0.0007979 − 0.0068393 ≈ 0.9924；E(X) = np = 20 × 0.3 = 6，Var(X) = np(1 − p) = 6 × 0.7 = 4.2。（評分要點：須寫出二項分佈公式；用 1 − P(X⩽1) 時須列兩項）

7. 設某十字路口的車輛到達數目服從泊松分佈，平均每 30 秒有 4 輛車到達，記 X 為 30 秒內的到達數目。

(a) 求 P(X = 3)，答案準確至 4 位小數。

(b) 求 P(X ⩽ 1)，並求 15 秒內沒有車輛到達的概率。

答案：答案：(a) X ~ Po(4)，$P(X=3) = e^{-4} \times 4^3 \div 3! = 0.0183156 \times 64 \div 6 \approx 0.1954$。(b) $P(X \leqslant 1) = e^{-4}(1+4) \approx 0.0916$；15 秒內平均 2 輛，故 P(無車) = e^{-2} = 0.1353。（評分要點：泊松公式須寫出 λ；15 秒一段須先把 λ 換成 2，直接沿用 4 扣 3 分）

8. 設某考試成績 X 服從正態分佈，平均值 50 分、標準差 10 分。

(a) 求 P(X > 62) 及 P(45 < X < 65)，各準確至 4 位小數。

(b) 若只有最高 10% 考生獲甲級，求甲級的最低分數 k（準確至 1 位小數），並解釋所用的標準分。

答案：答案：(a) 標準化 $z = (x-50)/10$；P(X > 62) = P(Z > 1.2) ≈ 0.1151；P(45 < X < 65) = P(−0.5 < Z < 1.5) ≈ 0.6247。(b) 需 $P(Z < z_0) = 0.9$，查表 $z_0 \approx 1.2816$，故 $k = 50 + 1.2816 \times 10 = 62.8$ 分。（評分要點：須寫出標準化步驟；直接用原值查表不給分）