

HKDSE 數學延伸部分單元二

中六 (DSE) 數學 (延伸單元二) | 時限：150 分鐘 | 總分：100 分 | 共 8 題

甲部：短題 (50 分)

全卷 100 分，考試時間 2 小時 30 分。須列出完整步驟，答案須附正確單位；除特別指明外，數值答案須準確至 3 位有效數字。

1. (數學歸納法) (a) 用數學歸納法證明：對所有正整數 n ， $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1) \div 6$ 。(6 分) (b) 由此求 $1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2$ 的值。(3 分) (c) 由此求 $11^2 + 12^2 + \cdots + 20^2$ 的值。(3 分)

答案：答案：(a) 設 $P(n)$ 為該命題。當 $n=1$ 時，左式 $= 1^2 = 1$ ，右式 $= 1 \times 2 \times 3 \div 6 = 1$ ， $P(1)$ 成立。假設 $P(k)$ 成立，即 $1^2 + \cdots + k^2 = k(k+1)(2k+1) \div 6$ ，則 $n=k+1$ 時左式 $= k(k+1)(2k+1) \div 6 + (k+1)^2 = (k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] \div 6 = (k+1)(2k^2 + 7k + 6) \div 6 = (k+1)(k+2)(2k+3) \div 6$ ，即 $P(k+1)$ 成立。由歸納法原理， $P(n)$ 對所有正整數 n 成立。〔6 分〕(b) 代入 $n=10$ ：385。〔3 分〕(c) $11^2 + 12^2 + \cdots + 20^2 = 2870 - 385 = 2485$ 。〔3 分〕

2. (二項式定理) (a) 求 $(2+x)^8$ 的展開式中 x^3 的係數。(4 分) (b) 求 $(1+3x)^6$ 的展開式中 x^2 的係數。(4 分) (c) 求 $(2+x)^8$ 的展開式中所有係數之和。(4 分)

答案：答案：(a) 通項為 $C(8, r) \cdot 2^{8-r} \cdot x^r$ ，取 $r=3$ 得係數 $C(8, 3) \cdot 2^5 = 56 \times 32 = 1792$ 。〔4 分〕(b) 通項為 $C(6, r) \cdot (3x)^r$ ，取 $r=2$ 得係數 $C(6, 2) \cdot 3^2 = 15 \times 9 = 135$ 。〔4 分〕(c) 令 $x=1$ ，係數之和 $= (2+1)^8 = 3^8 = 6561$ 。〔4 分〕

3. (三角學) A 及 B 均為銳角，且 $\sin A = 3/5$ 、 $\cos B = 5/13$ 。(a) 求 $\sin(A+B)$ 的值。(4 分) (b) 求 $\cos 2A$ 的值。(4 分) (c) 求 $\tan(A-B)$ 的值。(4 分)

答案：答案：(a) 因 A 為銳角， $\cos A = 4/5$ ；因 B 為銳角， $\sin B = 12/13$ 。 $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = (3/5)(5/13) + (4/5)(12/13) = 15/65 + 48/65 = 63/65$ 。〔4 分〕(b) $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = 1 - 2(9/25) = 7/25$ 。〔4 分〕(c) $\tan A = 3/4$ 、 $\tan B = 12/5$ ，故 $\tan(A-B) = (\tan A - \tan B) \div (1 + \tan A \tan B) = (-33/20) \div (56/20) = -33/56$ 。〔4 分〕

4. (極限與導數) (a) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x \div (2x)$ 。(3 分) (b) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \div x^2$ 。(3 分) (c) 設 $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ ，求 dy/dx ，並求曲線在 $x=2$ 處的切線方程。(4 分) (d) 求 $d/dx [x^2 \sin x]$ 。(4 分)

答案：答案：(a) $\sin 3x \div (2x) = (3/2) \cdot (\sin 3x \div 3x)$ ，當 $x \rightarrow 0$ 時 $\sin 3x \div 3x \rightarrow 1$ ，故極限為 $3/2$ 。〔3 分〕(b) $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$ ，故 $(1 - \cos x) \div x^2 = 2\sin^2(x/2) \div x^2 = (1/2) \cdot [\sin(x/2) \div (x/2)]^2 \rightarrow 1/2$ 。〔3 分〕(c) $dy/dx = 3x^2 - 6x + 4$ ；在 $x=2$ 時 $dy/dx = 4$ ， $y = -1$ ，切線為 $y = 4x - 9$ 。〔4 分〕(d) 由乘積法則， $d/dx [x^2 \sin x] = 2x \sin x + x^2 \cos x$ 。〔4 分〕

乙部：長題 (50 分)

全卷 100 分，考試時間 2 小時 30 分。須列出完整步驟，答案須附正確單位；除特別指明外，數值答案須準確至 3 位有效數字。

5. (積分) (a) 求 $\int_0^1 x(x^2 + 1)^3 dx$ 。 (6 分) (b) 求 $\int x \sin x dx$ 。 (6 分)

答案：答案：(a) 令 $u = x^2 + 1$ ，則 $du = 2x dx$ ；當 $x = 0$ 時 $u = 1$ ，當 $x = 1$ 時 $u = 2$ 。 $\int_0^1 x(x^2 + 1)^3 dx = (1/2) \int_1^2 u^3 du = (1/2)[u^4/4]_1^2 = (1/8)(16 - 1) = 15/8$ 。 [6 分] (b) 用分部積分，取 $u = x$ 、 $dv = \sin x dx$ ，則 $du = dx$ 、 $v = -\cos x$ ， $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$ 。 [6 分]

6. (矩陣) 設 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 。(a) 求 $\det A$ 。 (2 分) (b) 求 A^{-1} 。 (4 分) (c) 用 (b) 的結果解方程組 $2x + y = 7$ 、 $3x + 4y = 18$ 。 (6 分)

答案：答案：(a) $\det A = (2)(4) - (1)(3) = 5$ 。 [2 分] (b) $A^{-1} = (1/5) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ 。 [4 分] (c) 方程組可寫成 $A \cdot [x, y]^T = [7, 18]^T$ ，故 $[x, y]^T = A^{-1} \cdot [7, 18]^T$ ； $x = (4 \times 7 - 1 \times 18) \div 5 = 10/5 = 2$ ， $y = (-3 \times 7 + 2 \times 18) \div 5 = 15/5 = 3$ 。 [6 分]

7. (向量) 設 $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$ 、 $\mathbf{b} = (3, -1, 2)$ 。(a) 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 。 (3 分) (b) 求 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 。 (5 分) (c) 求 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 之間的夾角 θ (準確至 0.1°)。 (5 分)

答案：答案：(a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1)(3) + (2)(-1) + (-1)(2) = 3 - 2 - 2 = -1$ 。 [3 分] (b) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ((2)(2) - (-1)(-1), (-1)(3) - (1)(2), (1)(-1) - (2)(3)) = (4 - 1, -3 - 2, -1 - 6) = (3, -5, -7)$ 。 [5 分] (c) $|\mathbf{a}| = \sqrt{6}$ 、 $|\mathbf{b}| = \sqrt{14}$ ， $\cos \theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \div (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|) = -1 \div \sqrt{84} \approx -0.1091$ ，故 $\theta \approx 96.3^\circ$ 。 [5 分]

8. (行列式與方程組) 考慮方程組 $x + 2y + 3z = 14$ 、 $2x - y + z = 3$ 、 $3x + y - 2z = -1$ 。(a) 求係數矩陣的行列式 D 。 (5 分) (b) 用 Cramer 法則求 x 、 y 、 z 。 (8 分)

答案：答案：(a) $D = 1[(-1)(-2) - (1)(1)] - 2[(2)(-2) - (1)(3)] + 3[(2)(1) - (-1)(3)] = 1(1) - 2(-7) + 3(5) = 1 + 14 + 15 = 30$ 。 [5 分] (b) $D_x = 30$ 、 $D_y = 60$ 、 $D_z = 90$ ，故 $x = 30/30 = 1$ 、 $y = 60/30 = 2$ 、 $z = 90/30 = 3$ 。(各 2 分，共 8 分要有步驟)