IGCSE 數學練習卷：代數與圖像

中四至中五（S4 – S5）　數學　|　時限：75 分鐘　|　總分：100 分　|　共 12 題

甲部：展開、因式分解與方程（第 1 至 4 題，共 24 分）

回答全部題目；除特別指明外，答案取三位有效數字，並寫出計算步驟。

1. 展開 $(2x - 3)(x + 5)$，並化簡 $6x^4 \ y^2 \div 9x^2y^5$ 。（6 分）

答案：$(2x - 3)(x + 5) = 2x^2 + 10x - 3x - 15 = 2x^2 + 7x - 15$ (3)。$6x^4 \ y^2 \div 9x^2y^5 \ = (6 \div 9)x^2y^{-3} = 2x^2 \div (3y^3)$ (3)。

2. 因式分解：(a) $x^2 - 7x + 12$；(b) $2x^2 + 5x - 3$；(c) $9x^2 - 16$。（6 分）

答案：(a) $(x - 3)(x - 4)$ (2)。(b) $2x^2 + 6x - x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$ (3)。(c) $(3x - 4)(3x + 4)$ (1)。

3. 解聯立方程 $3x + 2y = 13$ 及 $5x - 2y = 11$；並解 $(2x - 1) \div 3 = (x + 4) \div 2$。（6 分）

答案：兩式相加：$8x = 24$，得 $x = 3$ (2)；代回 $3x + 2y = 13$ 得 $y = 2$ (2)。去分母：$2(2x - 1) = 3(x + 4)$，即 $4x - 2 = 3x + 12$，故 $x = 14$ (2)。

4. 用二次公式解 $2x^2 - 5x - 3 = 0$（答案取準確值），並由此把 $2x^2 - 5x - 3$ 因式分解。（6 分）

答案：$a = 2$，$b = -5$，$c = -3$，判別式 $= 25 + 24 = 49$ (2)；$x = (5 \pm 7) \div 4$，得 $x = 3$ 或 $x = -0.5$ (2)；故 $2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1)(x - 3)$ (2)。

乙部：直線、二次圖像與函數（第 5 至 8 題，共 32 分）

解方程須逐步列出步驟；解二次方程須寫出所用方法及捨去不合理解的理由。

5. $A(-1, 3)$ 與 $B(3, 11)$ 為直線 L 上兩點。(a) 求 L 的斜率及方程；(b) 求 L 與 x 軸的交點；(c) 求過 B 且垂直於 L 的直線方程。（8 分）

答案：(a) 斜率 $= (11 - 3) \div (3 + 1) = 2$ (2)；$y - 3 = 2(x + 1)$，即 $y = 2x + 5$ (2)。(b) 令 $y = 0$，得 $x = -2.5$，交點為 $(-2.5, 0)$ (1)。(c) 垂直斜率為 -0.5，$y - 11 = -0.5(x - 3)$，即 $y = -0.5x + 12.5$ (3)。

6. 曲線 $y = x^2 - 4x + 1$。(a) 配方求頂點坐標及對稱軸；(b) 解 $x^2 - 4x + 1 = 0$，答案取三位有效數字；(c) 直線 $y = 2$ 與曲線相交，求交點的 x 坐標。（8 分）

答案：(a) $y = (x - 2)^2 - 3$，頂點為 $(2, -3)$，對稱軸為 $x = 2$ (3)。(b) $(x - 2)^2 = 3$，$x = 2 \pm 1.73$，即 $x \approx 3.73$ 或 0.268 (3)。(c) $x^2 - 4x - 1 = 0$，$x = 2 \pm 2.24$，即 $x \approx 4.24$ 或 -0.236 (2)。

7. 解下列不等式：(a) $3 - 2x \geqslant 7$；(b) 列出所有滿足「$2x$ 大於 -3 且 $2x \leqslant 5$」的整數 x；(c) 求使 $x^2 - 5x + 6$ 為負數的 x 範圍。（8 分）

答案：(a) $-2x \geqslant 4$，除以負數須變號，故 $x \leqslant -2$ (3)。(b) -1.5 小於 x 而 $x \leqslant 2.5$，整數為 -1、0、1、2 (3)。(c) $(x - 2)(x - 3)$ 為負數，故 x 介乎 2 與 3 之間 (2)。

8. 已知 $f(x) = 3x - 2$，$g(x) = x^2 + 1$。(a) 求 $fg(2)$；(b) 求 $gf(2)$；(c) 求反函數 $f^{-1}(x)$；(d) 解 $f^{-1}(x) = 4$。（8 分）

答案：(a) $g(2) = 5$，$f(5) = 13$ (2)。(b) $f(2) = 4$，$g(4) = 17$ (2)。(c) $y = 3x - 2$ 即 $x = (y + 2) \div 3$，故 $f^{-1}(x) = (x + 2) \div 3$ (2)。(d) $(x + 2) \div 3 = 4$，得 $x = 10$ (2)。

丙部：判別式、指數圖像與綜合應用（第 9 至 12 題，共 44 分）

圖像題須標示交點與頂點坐標；應用題須先寫出所用變數的定義。

9. (a) 已知二次方程 $x^2 + kx + 9 = 0$ 有重根，求 k 的兩個可能值。(b) 當 $k = 6$ 時求該重根，並寫出曲線 $y = x^2 + 6x + 9$ 與 x 軸的接觸點及 y 軸截距。 (11 分)

答案：(a) 重根條件為判別式 $k^2 - 36 = 0$，故 $k = 6$ 或 $k = -6$ (4)。(b) $k = 6$ 時 $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$，重根 $x = -3$ (2)；$k = -6$ 時重根 $x = 3$ (1)；曲線與 x 軸接觸於 $(-3, 0)$，y 軸截距為 $(0, 9)$ (4)。

10. 曲線 $y = a \cdot b^x$ 通過 $(0, 3)$ 與 $(2, 27)$。(a) 求 a 與 b；(b) 求 $x = 4$ 時的 y 值；(c) 求 $y = 1/9$ 時的 x 值；(d) 寫出該曲線的漸近線方程。 (11 分)

答案：(a) $x = 0$ 時 $y = a = 3$ (2)；$x = 2$ 時 $3b^2 = 27$，$b^2 = 9$，故 $b = 3$ (2)。(b) $y = 3 \times 3^4 = 243$ (2)。(c) $3^{(x+1)} = 3^{-2}$，$x + 1 = -2$，故 $x = -3$ (3)。(d) 漸近線為 $y = 0$ (2)。

11. (a) 把 $y = (3x + 1) \div (x - 2)$ 變換為以 x 為主項。(b) 解 $3 \div (x - 1) + 2 \div (x + 2) = 1$，答案取三位有效數字。(c) 寫出 (b) 中 x 不可取的值。 (11 分)

答案：(a) $y(x - 2) = 3x + 1$，$xy - 3x = 1 + 2y$，$x(y - 3) = 1 + 2y$，故 $x = (1 + 2y) \div (y - 3)$ (4)。(b) 乘 $(x - 1)(x + 2)$：$3(x + 2) + 2(x - 1) = (x - 1)(x + 2)$，$5x + 4 = x^2 + x - 2$，$x^2 - 4x - 6 = 0$，$x = 2 \pm \sqrt{10} \approx 5.16$ 或 -1.16 (5)。(c) $x = 1$ 及 $x = -2$ 使分母為零 (2)。

12. 一長方形的周界為 40 cm，兩邊長分別為 x cm 與 $(20 - x)$ cm。(a) 以 x 表示面積 A；(b) 配方求 A 的最大值及此時的 x；(c) 說明 $x = 8$ 與 $x = 12$ 得出相同面積的原因；(d) 求使面積為 75 cm² 的 x 值。 (11 分)

答案：(a) $A = x(20 - x) = 20x - x^2$ (2)。(b) $A = -(x - 10)^2 + 100$，$x = 10$ 時 A 的最大值為 100 cm² (4)。(c) 8 與 12 關於 $x = 10$ 對稱，故兩者面積相同，均為 96 cm² (2)。(d) $x^2 - 20x + 75 = 0$，$(x - 5)(x - 15) = 0$，故 $x = 5$ 或 15 (3)。
