中四數學練習卷：二次方程、函數圖像與應用

中四（S4）　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 12 題

甲部（第 1 至 4 題）

解方程與根的性質：須寫出完整步驟。

1.

解下列二次方程，須展示步驟。

(a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

(b) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

答案：

(a) $(x - 3)(x - 4) = 0$，故 $x = 3$ 或 $x = 4$。

(b) $(2x - 1)(x + 3) = 0$，故 $x = 1/2$ 或 $x = -3$。

評分要點：正確因式分解各得 1 分，寫出兩個根各得 1 分。

2.

已知二次方程 $x^2 + kx + 9 = 0$，其中 k 為常數。

(a) 若方程有重根（兩個相等實根），求 k 的所有可能值。

(b) 若 $k = -10$，求方程的根，並判斷根的性質。

答案：

(a) 重根須判別式為 0：$k^2 - 36 = 0$，故 $k = 6$ 或 $k = -6$。

(b) $k = -10$ 時方程為 $x^2 - 10x + 9 = 0$，判別式 $= 100 - 36 = 64 > 0$，故有兩個相異實根；$(x - 1)(x - 9) = 0$，$x = 1$ 或 $x = 9$。

評分要點：判別式條件 2 分，兩個 k 值 2 分，判別式計算 2 分，根 2 分。

3.

以配方法把 $y = x^2 - 6x + 5$ 寫成 $y = (x - h)^2 + k$ 的形式，並寫出圖像的頂點、對稱軸及最小值。

答案：

$y = x^2 - 6x + 5 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$。

頂點為 $(3, -4)$，對稱軸為 $x = 3$，最小值為 -4。

評分要點：配方過程 4 分，頂點 2 分，對稱軸 1 分，最小值 2 分。

4.

設 α、β 為方程 $3x^2 - 7x + 2 = 0$ 的兩個根。

(a) 求 $\alpha + \beta$ 及 $\alpha\beta$。

(b) 求 $1/\alpha + 1/\beta$ 的值。

(c) 由此求 α 及 β 的值。

答案：

(a) $\alpha + \beta = 7/3$，$\alpha\beta = 2/3$。

(b) $1/\alpha + 1/\beta = (\alpha + \beta)/(\alpha\beta) = (7/3) \div (2/3) = 7/2$。

(c) $3x^2 - 7x + 2 = (3x - 1)(x - 2)$，故 α、β 為 $1/3$ 及 2（順序不限）。

評分要點：和與積各 1 分，通分後代值 2 分，因式分解與根 4 分。

乙部（第 5 至 8 題）

圖像、最值與不等式：可用配方或公式。

5.

一個球從離地 1 m 處以 20 m/s 向上拋出，其離地高度 h（米）與時間 t（秒）的關係為 $h = -5t^2 + 20t + 1$。

(a) 求球到達最高點所需的時間及最高高度。

(b) 求球着地所需的時間（取 3 位有效數字）。

答案：

(a) $h = -5(t - 2)^2 + 21$，故 $t = 2$ s 時達最高點，最高高度為 21 m。

(b) 令 $h = 0$：$-5t^2 + 20t + 1 = 0$，$t = [20 + \sqrt{(400 + 20)}]/10 = (20 + \sqrt{420})/10 \approx 4.05$ s（捨去負值）。

評分要點：配方或頂點公式 3 分，最高高度 1 分，設 $h = 0$ 並解方程 4 分，取正根及單位 1 分。

6.

解下列二次不等式。

(a) $x^2 - 5x + 6 < 0$

(b) $x^2 - 2x - 8 \geqslant 0$

答案：

(a) $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3) < 0$，故 $2 < x < 3$。

(b) $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2) \geqslant 0$，故 $x \leqslant -2$ 或 $x \geqslant 4$。

評分要點：每題因式分解 1 分、答案 3 分；用區間表示同樣接受。

7.

考慮函數 $y = 2x^2 - 8x + 3$。

(a) 求圖像的對稱軸及頂點。

(b) 寫出函數的最小值及值域。

(c) 描述圖像由 $y = 2x^2$ 經甚麼變換得到。

答案：

(a) $y = 2(x^2 - 4x) + 3 = 2(x - 2)^2 - 5$，對稱軸 $x = 2$，頂點 $(2, -5)$。

(b) 因 $a = 2 > 0$，最小值為 -5，值域為 $y \geqslant -5$。

(c) 把 $y = 2x^2$ 的圖像向右平移 2 單位、向下平移 5 單位。

評分要點：配方 3 分，對稱軸與頂點 2 分，最小值與值域 2 分，變換描述 1 分。

8.

某商店售賣一款文具，售價為 $\$(80 - x)$，每月可售出 $(20 + 2x)$ 件，其中 $0 \leqslant x \leqslant 60$。

(a) 證明每月收入 R（元）可表示為 $R = -2x^2 + 140x + 1600$。

(b) 求 x 的值使收入最大，並求最大收入。

答案：

(a) $R = (80 - x)(20 + 2x) = 1600 + 160x - 20x - 2x^2 = -2x^2 + 140x + 1600$。

(b) $R = -2(x - 35)^2 + 4050$，故 $x = 35$ 時收入最大，最大收入為 $\$4050$。

評分要點：展開 3 分，配方 3 分，x 值 2 分，最大收入 1 分。

丙部（第 9 至 12 題）

聯立方程與應用題：答案須附單位。

9.

解聯立方程 $y = x^2 - 2x$ 及 $y = x + 4$。

答案：

由兩式得 $x^2 - 2x = x + 4$，即 $x^2 - 3x - 4 = 0$，$(x - 4)(x + 1) = 0$，$x = 4$ 或 $x = -1$。

當 $x = 4$，$y = 8$；當 $x = -1$，$y = 3$。解為 $(4, 8)$ 及 $(-1, 3)$。

評分要點：消 y 得二次方程 3 分，因式分解 2 分，兩組解各 1 分，對應 y 值 2 分。

10.

已知某二次方程的兩個根為 $2 + \sqrt{3}$ 及 $2 - \sqrt{3}$。

(a) 求兩根之和與兩根之積。

(b) 由此求該二次方程（x^2 的係數為 1）。

(c) 求該方程的判別式，並解釋其結果。

答案：

(a) 和 $= (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$；積 $= (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$。

(b) 方程為 $x^2 - 4x + 1 = 0$。

(c) 判別式 $= 16 - 4 = 12 > 0$，故有兩個相異實根，與題設相符。

評分要點：和、積各 1 分，方程 4 分，判別式及解釋 2 分。

11.

解方程 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$。

答案：

設 $u = x^2$，則 $u^2 - 5u + 4 = 0$，$(u - 1)(u - 4) = 0$，$u = 1$ 或 $u = 4$。

當 $x^2 = 1$，$x = 1$ 或 $x = -1$；當 $x^2 = 4$，$x = 2$ 或 $x = -2$。故 $x = \pm 1$ 或 $x = \pm 2$。

評分要點：換元 2 分，解 u 2 分，四根各 1 分。

12.

用 40 m 的圍欄圍出一個矩形花圃，其中一邊靠着牆，該邊不需圍欄。

(a) 設垂直於牆的邊長為 x m，以 x 表示花圃面積 A（m^2）。

(b) 求 A 的最大值及對應的尺寸。

答案：

(a) 垂直於牆的兩邊各長 x m，平行於牆的一邊長 (40 - 2x) m，故 $A = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$（$0 < x < 20$）。

(b) $A = -2(x - 10)^2 + 200$，故 $x = 10$ 時 A 最大為 200 m^2，尺寸為 10 m × 20 m。

評分要點：列出 A 的表達式 3 分，配方 3 分，x 值 2 分，最大面積及尺寸 1 分。

TutorZone 中四（S4）數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。