中四數學練習卷：二次方程、對數、數列與座標幾何

中四（S4）　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 12 題

甲部：二次方程與多項式（24 分）

每題 6 分，須列式或說明推理。

1. 設 α、β 為方程 $2x^2 - 7x + 3 = 0$ 的兩根。(a) 以因式分解法解該方程。(b) 求 $\alpha + \beta$ 與 $\alpha\beta$，並由此求判別式的值。(c) 求以 $\alpha + 1$ 與 $\beta + 1$ 為兩根的二次方程，並以 $ax^2 + bx + c = 0$（a、b、c 為整數）的形式表示。

答案：(a) $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)(x - 3) = 0$，故 $x = 1/2$ 或 $x = 3$。(b) $\alpha + \beta = 7/2$，$\alpha\beta = 3/2$；判別式 $= 49 - 24 = 25$（大於 0，故兩根為相異實數）。(c) 新根之和 $= 7/2 + 2 = 11/2$，新根之積 $= (1/2 + 1)(3 + 1) = 6$，故方程為 $x^2 - (11/2)x + 6 = 0$，即 $2x^2 - 11x + 12 = 0$。評分要點：正確因式分解、根與係數關係、以根之和與積構造方程。

2. 設 $p(x) = 2x^3 + ax^2 - 5x + 6$，其中 a 為常數。已知 $p(1) = 0$。(a) 求 a 的值。(b) 將 $p(x)$ 分解為一次因式的乘積。(c) 由此解方程 $p(x) = 0$，並寫出全部根。

答案：(a) $p(1) = 2 + a - 5 + 6 = a + 3 = 0$，故 $a = -3$。(b) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(2x^2 - x - 6) = (x - 1)(2x + 3)(x - 2)$。(c) 由 (b) 得 $x = 1$、$x = 2$ 或 $x = -3/2$。評分要點：餘式定理代入、長除法或比較係數、完整分解並列出全部根。

3. (a) 不使用計算機，化簡 $(27^{(2/3)} \times 9^{(-1/2)}) \div 81^{(1/4)}$，並展示每一步。(b) 解方程 $4^{(x+1)} = 8^{(2x-3)}$。(c) 已知 $5^a = 2$ 及 $5^b = 3$，求 $5^{(2a+b)}$ 的值。

答案：(a) $27^{(2/3)} = (\sqrt[3]{27})^2 = 9$，$9^{(-1/2)} = 1/3$，$81^{(1/4)} = 3$，故原式 $= 9 \times (1/3) \div 3 = 1$。(b) $4^{(x+1)} = 2^{(2x+2)}$，$8^{(2x-3)} = 2^{(6x-9)}$；同底比較指數得 $2x + 2 = 6x - 9$，故 $x = 11/4 = 2.75$。(c) $5^{(2a+b)} = (5^a)^2 \times 5^b = 2^2 \times 3 = 12$。評分要點：分數指數與負指數的處理、同底比較、指數律合併。

4. 一個長方形的周界為 26 cm，面積為 40 cm²。設長為 x cm。(a) 證明 x 滿足方程 $x^2 - 13x + 40 = 0$。(b) 求該長方形的長與闊。(c) 求該長方形對角線的長度（答案準確至 2 位小數）。

答案：(a) 闊為 $(13 - x)$ cm，由面積得 $x(13 - x) = 40$，展開即 $x^2 - 13x + 40 = 0$。(b) $(x - 5)(x - 8) = 0$，故長與闊為 8 cm 及 5 cm。(c) 對角線 $= \sqrt{(8^2 + 5^2)} = \sqrt{89} \approx 9.43$ cm。評分要點：設立未知數並寫出方程、因式分解、開方取正根。

乙部：指數、對數與數列（36 分）

每題 9 分，注意題目各部分的配分。

5. (a) 解方程 $\log_2(x + 3) + \log_2(x - 3) = 4$，並解釋為何要剔除其中一個解。(b) 解方程 $\log_4(x + 12) = 2$。(c) 不使用計算機，求 $\log 8 \div \log 2 + \log 25 + \log 4$ 的值（對數以 10 為底）。

答案：(a) 合併對數得 $\log_2(x^2 - 9) = 4$，故 $x^2 - 9 = 16$，$x^2 = 25$，$x = 5$ 或 $x = -5$；因真數須為正數（x 大於 3），故捨去 $x = -5$，答案 $x = 5$。(b) $\log_4(x + 12) = 2$，故 $x + 12 = 16$，$x = 4$。(c) $\log 8 \div \log 2 = 3$（因 $2^3 = 8$），$\log 25 + \log 4 = \log 100 = 2$，故總和 $= 5$。評分要點：對數合併法則、指數化、真數範圍檢查。

6. 一部汽車的價值 V（元）在購入 n 年後為 $V = 240000 \times 0.85^n$。(a) 求購入 3 年後的價值（準確至元）。(b) 求最少多少年後價值首次低於 $100,000，並展示取對數的步驟。(c) 若另一部汽車每年按固定百分率 r 折舊，4 年後價值剛好為原價的一半，求 r（準確至 0.1%）。

答案：(a) $V = 240000 \times 0.85^3 = \$147{,}390$。(b) 需 0.85^n 小於 5/12，兩邊取對數得 n 大於 5.387，故最少 6 年後（第 5 年仍為 $106,489，第 6 年為 $90,516）。(c) $(1-r)^4 = 0.5$，$1 - r = 0.5^{(1/4)} = 0.8409$，故 $r = 0.1591$，即每年約 15.9%。評分要點：正確代入、取對數處理不等式、四次方根與百分率表示。

7. (a) 某等差數列首項為 7，公差為 4，求第 20 項。(b) 求該數列首 20 項之和。(c) 某等比數列首項為 3，公比為 2，求首 8 項之和。(d) 承 (a)(b)，求最小的 n 使該等差數列首 n 項之和大於 1000，並以計算支持你的答案。

答案：(a) 第 20 項 $= 7 + 19 \times 4 = 83$。(b) 首 20 項和 $= 20/2 \times (7 + 83) = 900.0$。(c) 首 8 項和 $= 3(2^8 - 1)/(2 - 1) = 765$。(d) 首 n 項和 $= n(2n + 5)$；$n = 21$ 時為 987，$n = 22$ 時為 1078，故最小 $n = 22$。評分要點：通項公式、等差與等比求和公式、驗證邊界值。

8. 設 y 隨 x^2 正變，並隨 z 反變。當 $x = 4$、$z = 2$ 時，$y = 24$。(a) 求變分常數並寫出 y 與 x、z 的關係式。(b) 當 $x = 6$、$z = 9$ 時，求 y。(c) 當 $y = 9$、$x = 3$ 時，求 z。

答案：(a) 設 $y = kx^2/z$，代入 $24 = k \times 16 \div 2$ 得 $k = 3.0$，故 $y = 3x^2/z$。(b) $y = 3 \times 36 \div 9 = 12.0$。(c) 由 $9 = 3 \times 9 \div z$ 得 $z = 3.0$。評分要點：寫出變分式、求變分常數、代回求值。

丙部：座標幾何、三角、統計與概率（40 分）

每題 10 分，須作完整計算或解釋。

9. 已知 A(−2, 1) 與 B(4, 5) 為坐標平面上兩點。(a) 求 AB 的長度（答案以根式表示，並取 2 位小數）。(b) 求 AB 的中點坐標。(c) 求 AB 的垂直平分線方程，並以 $Ax + By + C = 0$ 的形式表示。(d) 求該垂直平分線與 y 軸的交點，並說明該點與 A、B 的距離關係。

答案：(a) $AB = \sqrt{[(4+2)^2 + (5-1)^2]} = \sqrt{(36 + 16)} = 2\sqrt{13} \approx 7.21$。(b) 中點 $= ((-2 + 4)/2, (1 + 5)/2) = (1, 3)$。(c) AB 的斜率 $= (5 - 1)/(4 + 2) = 2/3$，故垂直平分線斜率 $= -3/2$；過 (1, 3) 得 $y - 3 = -(3/2)(x - 1)$，整理為 $3x + 2y - 9 = 0$。(d) 令 $x = 0$ 得 $y = 4.5$，交點為 (0, 4.5)；代入可知該點與 A、B 的距離相等（均為 $\sqrt{(4 + 12.25)}$），即它是 AB 的垂直平分線上一點。評分要點：距離公式、中點公式、垂直斜率之積為 −1、標準式整理。

10. 在三角形 ABC 中，AB = 10 cm，AC = 14 cm，$\angle A = 60^\circ$。(a) 求 BC 的長度（準確至 2 位小數）。(b) 求三角形 ABC 的面積（答案以根式及 2 位小數表示）。(c) 求 $\angle B$（準確至 0.1°），並說明所用的公式。

答案：(a) $BC^2 = 10^2 + 14^2 - 2 \times 10 \times 14 \times \cos 60^\circ = 100 + 196 - 140 = 156$，故 $BC = 2\sqrt{39} \approx 12.49$ cm。(b) 面積 $= \tfrac{1}{2} \times 10 \times 14 \times \sin 60^\circ = 35\sqrt{3} \approx 60.62$ cm²。(c) 由正弦公式 $\sin B \div 14 = \sin 60^\circ \div BC$，得 $\sin B \approx 0.9707$，故 $\angle B \approx 76.1^\circ$。評分要點：餘弦公式、面積公式、正弦公式求角並取合理範圍。

11. 某組數據為 4、7、7、9、11、13、15、18。(a) 求平均數。(b) 求中位數。(c) 求眾數。(d) 求標準差（準確至 2 位小數）。(e) 若每個數據同時加 3，分別說明平均數、中位數、標準差及全距有何變化，並解釋原因。

答案：(a) 平均數 = (4 + 7 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 18) ÷ 8 = 10.5。(b) 中位數 = (9 + 11) ÷ 2 = 10。(c) 眾數 = 7（出現兩次）。(d) 離差平方和 = 152，方差 = 152 ÷ 8 = 19，標準差 ≈ 4.36。(e) 每個數據加 3：平均數變 13.5，中位數變 13；標準差與全距不變（仍為 4.36 與 14），因為整體平移不改變數據之間的分散程度。評分要點：平均與中位數的定義、離差平方和、理解平移的影響。

12. 一個袋中有 5 個紅球、3 個藍球及 2 個綠球，除顏色外完全相同。(a) 隨機抽出一球，求抽出紅球的概率。(b) 不放回地抽出兩球，求兩球皆為紅球的概率。(c) 不放回地抽出兩球，求至少有一球為綠球的概率。(d) 放回地抽出兩球，求剛好一紅一藍的概率。

答案：(a) P(紅球) = 5/10 = 0.5。(b) P(兩球皆紅) = (5/10) × (4/9) = 2/9 ≈ 0.222。(c) P(至少一綠) = 1 − (8/10)(7/9) = 1 − 28/45 = 17/45 ≈ 0.378。(d) P(剛好一紅一藍) = 2 × (5/10) × (3/10) = 0.3。評分要點：不放回時分母遞減、以反面事件處理「至少」、考慮兩種次序。

TutorZone 中四（S4）數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。