中四數學練習卷：三角學、指數與對數、概率

中四（S4）　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 12 題

甲部：三角學

全部小題均須作答，計算題須列出步驟及單位。

1. 某船由 A 點出發，先以方位角 065° 航行 12 km 到達 B 點，然後轉向方位角 155° 航行 9 km 到達 C 點。(a) 求 A 至 C 的距離。(b) 求 C 點相對 A 點的方位角（準確至最接近的度）。(c) 若船由 C 點以 9 km/h 直接返回 A 點，需時多少小時多少分鐘？

答案：(a) 兩段航線的方位角相差 155° − 65° = 90°，故 B 點為直角。$AC^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$，AC = 15 km。(b) 在 A 點，AB 與 AC 的夾角 θ 滿足 $\tan\theta = 9 \div 12 = 0.75$，$\theta \approx 36.9°$。故 C 的方位角 = 65° + 36.9° ≈ 102°。(c) 時間 = 15 ÷ 9 = 1.667 小時 = 1 小時 40 分鐘。

2. 在三角形 ABC 中，AB = 8 cm，BC = 11 cm，∠ABC = 118°。(a) 求 AC 的長度（準確至 0.1 cm）。(b) 求 ∠BAC（準確至 0.1°）。(c) 求三角形 ABC 的面積（準確至 0.1 cm²）。

答案：(a) 由餘弦定理，$AC^2 = 8^2 + 11^2 - 2 \times 8 \times 11 \times \cos 118° = 185 + 82.6 = 267.6$，故 AC = 16.4 cm。(b) 由正弦定理，$\sin \angle BAC \div 11 = \sin 118° \div 16.36$，得 $\sin \angle BAC = 0.594$，故 ∠BAC = 36.4°。(c) 面積 = ½ × 8 × 11 × sin 118° = 38.8 cm²。

3. 考慮方程 $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$。(a) 把方程的左邊分解為兩個一次因式。(b) 求 $0° \leqslant x \leqslant 360°$ 內的所有解。(c) 求同一方程在 $0° \leqslant x \leqslant 720°$ 內的所有解，並寫出解的數目。

答案：(a) 設 $u = \sin x$，則 $2u^2 + u - 1 = (2u - 1)(u + 1)$，故方程可寫成 $(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$。(b) $2\sin x - 1 = 0$ 給出 $\sin x = 0.5$，即 $x = 30°$ 或 150°；$\sin x + 1 = 0$ 給出 $\sin x = -1$，即 $x = 270°$。(c) 把每個解加 360°，得 30°、150°、270°、390°、510°、630°，共 6 個解。

4. 長方體 ABCDEFGH 的長、闊、高分別為 8 cm、6 cm 及 5 cm，其中 ABCD 為底面，CG 為其中一條側棱。(a) 求底面對角線 AC 的長度。(b) 求空間對角線 AG 的長度（準確至 0.1 cm）。(c) 求 AG 與底面 ABCD 的夾角（準確至 0.1°），並說明所用的三角形。

答案：(a) $AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$，故 AC = 10 cm。(b) CG 垂直於底面，故三角形 ACG 在 C 點成直角：$AG^2 = AC^2 + CG^2 = 100 + 25 = 125$，AG = 11.2 cm。(c) 在直角三角形 ACG 中，$\tan\theta = CG \div AC = 5 \div 10 = 0.5$，故 $\theta = 26.6°$。

乙部：指數與對數

全部小題均須作答，數值答案須準確至指定小數位。

5. (a) 不用計算機，求 8^(2/3)、16^(−3/4) 及 27^(2/3) 的值。(b) 解方程 3^(2x − 1) = 27^(x − 2)。(c) 化簡 $(a^3b^{-2})^2 \div (a^{-1}b^3)$，並以正指數表示答案。

答案：(a) $8^{(2/3)} = (\sqrt[3]{8})^2 = 4$；$16^{(-3/4)} = 1 \div 16^{(3/4)} = 1 \div 8 = 0.125$；$27^{(2/3)} = (\sqrt[3]{27})^2 = 9$。(b) 因為 $27 = 3^3$，所以 $27^{(x-2)} = 3^{(3x-6)}$。比較指數得 $2x - 1 = 3x - 6$，故 $x = 5$。(c) 分子 = $a^6\ b^{-4}$；除以 $a^{-1}b^3$ 得 $a^{(6+1)}b^{(-4-3)} = a^7\ b^{-7} = a^7 \div b^7$。

6. (a) 求 $\log_3 54 - \log_3 2$ 的值。 (b) 解方程 $\log_2 (x + 3) + \log_2 (x - 3) = 4$。 (c) 說明 (b) 中另一個代數根為何不被接納。

答案：(a) $\log_3 54 - \log_3 2 = \log_3 (54 \div 2) = \log_3 27 = 3$，因為 $3^3 = 27$。 (b) 合併對數得 $\log_2 ((x + 3)(x - 3)) = 4$，即 $x^2 - 9 = 2^4 = 16$，故 $x^2 = 25$，$x = 5$ 或 $x = -5$。 (c) 對數的真數必須為正數，故 $x + 3$ 與 $x - 3$ 均須大於零；$x = -5$ 使 $x + 3$ 為負，因此捨去，唯一解為 $x = 5$。

7. 某培養皿的細菌數目 N 隨時間 t（小時）按公式 $N = 500 \times 2^{(t/3)}$ 增長。 (a) 求開始 18 小時後的細菌數目。 (b) 求細菌數目首次達到 100 000 所需的時間（準確至 0.1 小時）。 (c) 求細菌數目首次超過 1 000 000 的整數小時，並解釋為何取整數。

答案：(a) $N = 500 \times 2^{(18 \div 3)} = 500 \times 2^6 = 32000$。 (b) 需 $500 \times 2^{(t/3)} = 100\,000$，即 $2^{(t/3)} = 200$。取對數得 $t = 3 \times \log 200 \div \log 2 = 22.9$ 小時。 (c) 需 $2^{(t/3)} = 2000$，$t = 3 \times \log 2000 \div \log 2 = 32.9$ 小時；細菌數目只在整點統計，故首次超過 1 000 000 為第 33 小時。

8. 聲音的聲強級 L（分貝）與聲強 I（W m⁻²）的換算公式為 $L = 10 \log_{10} (I \div I_0)$，其中 I_0 為參考聲強。 (a) 求 75 dB 與 60 dB 兩個聲響的聲強之比。 (b) 某機器單獨運作時聲強級為 60 dB。若同時開動同款機器，需要多少部才達到 75 dB？ (c) 說明聲強級增加 3 dB 代表聲強增加多少倍。

答案：(a) 兩者的分貝差為 15，故 $I_2 \div I_1 = 10^{(15 \div 10)} = 10^{1.5} = 31.6$，即約 32 倍。 (b) 同款機器的聲強相同，故需約 32 部（實際上取 32 部）才達到 75 dB。 (c) $10 \log_{10} 2 = 3.0$，故聲強加倍時聲強級增加約 3 dB；反過來，增加 3 dB 即聲強約增加 2 倍。

丙部：概率與統計

全部小題均須作答，解釋題須引用公式或原理。

9. 袋中有 5 個紅球及 3 個藍球，共 8 個球。隨機抽出 2 個球，每次抽出後不放回。 (a) 求兩個球皆為紅色的概率。 (b) 求恰有一個紅球的概率。 (c) 求至少有一個藍球的概率，並以 (a) 的結果解釋。

答案：(a) $P(\text{紅, 紅}) = (5 \div 8) \times (4 \div 7) = 20 \div 56 = 5 \div 14 \approx 0.357$。 (b) 紅藍與藍紅兩種次序：$P = 2 \times (5 \div 8) \times (3 \div 7) = 30 \div 56 = 15 \div 28 \approx 0.536$。 (c) 「至少一個藍球」是「兩個皆紅」的餘事件，故 $P = 1 - 5 \div 14 = 9 \div 14 \approx 0.643$。

10. 某校 120 名學生中，72 人喜歡數學，45 人喜歡物理，30 人同時喜歡這兩科。現隨機選出一名學生。 (a) 求該學生喜歡數學的概率。 (b) 已知該學生喜歡數學，求他喜歡物理的概率。 (c) 判斷「喜歡數學」與「喜歡物理」是否獨立事件，並以計算說明。

答案：(a) $P(\text{數學}) = 72 \div 120 = 0.6$。 (b) $P(\text{物理} \mid \text{數學}) = 30 \div 72 = 5 \div 12 \approx 0.417$。 (c) $P(\text{數學}) \times P(\text{物理}) = 0.6 \times 0.375 = 0.225$，而 $P(\text{兩科}) = 30 \div 120 = 0.25$；兩者不相等，故兩事件不獨立（喜歡數學的學生較傾向喜歡物理）。

11. 某班有 5 名男生及 4 名女生，共 9 人。 (a) 由 9 人中選出 3 人組成委員會，共有多少種選法？ (b) 若委員會的 3 人中至少要有 1 名女生，共有多少種選法？ (c) 若由 9 人中選出 4 人，其中恰有 2 名女生，共有多少種選法？

答案：(a) $C(9, 3) = 84$。 (b) 用全部選法減去全為男生的選法：$84 - C(5, 3) = 84 - 10 = 74$。 (c) 先選 2 名女生再選 2 名男生：$C(4, 2) \times C(5, 2) = 6 \times 10 = 60$。

12. 某組九名學生的測驗分數為 10、12、14、16、18、20、22、24、26。(a) 求平均數及中位數。(b) 求標準差，以 n 為分母（準確至 0.01）。(c) 若加入一名得 28 分的學生，求新數據的平均數及標準差（準確至 0.01），並比較兩者的分散程度。

答案：(a) 總和 = 162，平均數 = 162 ÷ 9 = 18；中位數（第 5 個數據）= 18。(b) 離差平方和 = 240.0，方差 = 240.0 ÷ 9 = 26.67，標準差 = 5.16。(c) 新總和 = 190，平均數 = 19；平方和由 3156 增至 3940，方差 = 3940 ÷ 10 − 19^2 = 33，標準差 = 5.74，分散程度略增。

TutorZone 中四（S4）數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。