中五數學練習卷：函數與圖像、數列、排列組合與概率

中五（S5）　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 12 題

甲部：函數與圖像（第 1 – 4 題）

全部題目均須作答；計算題須列出算式、代入步驟及單位。

1. 設函數 $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$。 (a) 以配方形式表示 $f(x)$，並寫出圖像的頂點及對稱軸。 (b) 求 $f(x)$ 的最小值，並判斷該函數有沒有最大值。 (c) 解方程 $f(x) = 0$，答案取三位有效數字。

答案：(a) $f(x) = 2(x^2 - 4x) + 5 = 2(x - 2)^2 - 8 + 5 = 2(x - 2)^2 - 3$；頂點為 $(2, -3)$，對稱軸為 $x = 2$。 (b) 因為 x^2 的二次項數字 2 為正數，拋物線開口向上，最小值為 -3；沒有最大值（函數值可無限增大）。 (c) $2x^2 - 8x + 5 = 0$，判別式 $= 64 - 40 = 24$；$x = (8 \pm \sqrt{24}) \div 4$，得 $x = 3.225$ 或 $x = 0.775$。 評分要點：配方及頂點對稱軸（3 分）、最小值判斷與解釋（3 分）、求根公式及有效數字（3 分）。

2. 某細菌培養的數量 y 與時間 x 小時的對應為 $y = 3 \times 2^x$。 (a) 求 $x = 4$ 時 y 的值。 (b) 求 $y = 96$ 時 x 的值。 (c) 描述 $y = 3 \times 2^x$ 的圖像與 $y = 2^x$ 的圖像之間的變換對應。

答案：(a) $y = 3 \times 2^4 = 3 \times 16 = 48$。 (b) $3 \times 2^x = 96$，即 $2^x = 32 = 2^5$，所以 $x = 5$。 (c) 把 $y = 2^x$ 的圖像沿 y 軸方向伸延 3 倍（縱向拉長為原來的 3 倍），圖像與 y 軸的交點由 1 升至 3。 評分要點：代入計算（3 分）、解指數方程（3 分）、變換描述（2 分）。

3. 已知 $y = x^2$ 的圖像向右平移 3 單位、再向上平移 4 單位，得到 $y = g(x)$ 的圖像。 (a) 寫出 $g(x)$ 的代數式。 (b) 寫出 g 的圖像的頂點坐標。 (c) 求 $g(0)$ 的值，並說明它與 y 截距的對應。

答案：(a) 向右平移 3 單位即把 x 換成 $(x - 3)$，向上平移 4 單位即在函數外加上 4，所以 $g(x) = (x - 3)^2 + 4$。 (b) 頂點由 $(0, 0)$ 移至 $(3, 4)$。 (c) $g(0) = (0 - 3)^2 + 4 = 9 + 4 = 13$，即圖像與 y 軸交於 $(0, 13)$，此值就是 y 截距。 評分要點：代數式（3 分）、頂點（3 分）、代入及 y 截距解釋（3 分）。

4. 某小店出售手作蛋糕，售價為每件 x 元時，每日可售出 $(120 - 2x)$ 件，收益 $R(x) = x(120 - 2x)$ 元。 (a) 把 $R(x)$ 寫成 $a(x - h)^2 + k$ 的形式。 (b) 求售價使收益最大，並求最大收益。 (c) 若店主希望每日收益不少於 1600 元，求售價的整數範圍。

答案：(a) $R(x) = -2x^2 + 120x = -2(x^2 - 60x) = -2(x - 30)^2 + 1800$。 (b) 因 -2 為負數，$x = 30$ 時 R 最大，最大收益 $= 1800$ 元。 (c) $-2(x - 30)^2 + 1800 \geqslant 1600$ 即 $(x - 30)^2 \leqslant 100$，故 $20 \leqslant x \leqslant 40$；售價的整數範圍為 20 元至 40 元。 評分要點：配方（4 分）、最大值及售價（4 分）。

乙部：數列與求和（第 5 – 8 題）

提示：拋物線 $y = ax^2 + bx + c$ 的頂點 x 坐標為 $-b \div 2a$；無限等比數列之和為 $a \div (1 - r)$，僅當 r 的絕對值小於 1。

5. 某等差數列的首項為 7，公差為 −3。 (a) 求第 20 項。 (b) 求首 20 項之和。 (c) 求首 n 項之和 $S(n)$ 的代數式，並判斷 $S(n)$ 會不會等於 0。

答案：(a) 第 20 項 $= 7 + 19 \times (-3) = 7 - 57 = -50$。 (b) 首 20 項之和 $= 20 \times (7 + (-50)) \div 2 = 10 \times (-43) = -430$。 (c) $S(n) = n \div 2 \times [14 + (n - 1)(-3)] = n(17 - 3n) \div 2$；令 $S(n) = 0$ 得 $n = 0$ 或 $n = 17 \div 3$（非整數），故首 n 項之和不會等於 0（n 為正整數）。 評分要點：通項（2 分）、求和公式及數值（3 分）、$S(n)$ 代數式與判斷（3 分）。

6. 某等比數列的首項為 5，公比為 0.6。 (a) 求首 5 項之和。 (b) 求該數列無限項之和。 (c) 說明為何這個等比數列的無限項之和存在，而公比為 1.2 時則不存在。

答案：(a) 首 5 項之和 $= 5 \times (1 - 0.6^5) \div (1 - 0.6) = 5 \times (1 - 0.07776) \div 0.4 \approx 11.528$。 (b) 無限項之和 $= 5 \div (1 - 0.6) = 5 \div 0.4 = 12.5$。 (c) 公比 0.6 的絕對值小於 1，各項逐漸趨向 0，部分和收斂；公比 1.2 的絕對值大於 1，各項絕對值不斷增大，部分和發散，故無限項之和不存在。 評分要點：有限項之和（3 分）、無限項之和（3 分）、收斂條件解釋（2 分）。

7. 考慮 100 與 500 之間所有 3 的倍數。 (a) 寫出這個數列的首項與末項。 (b) 求這些數的個數。 (c) 求它們的總和，並說明所用公式的條件。

答案：(a) 首項為大於 100 的最小 3 的倍數，即 102；末項為小於 500 的最大 3 的倍數，即 498。 (b) 個數 $n = (498 - 102) \div 3 + 1 = 133$。 (c) 總和 $= n(\text{首項} + \text{末項}) \div 2 = 133 \times (102 + 498) \div 2 = 133 \times 300 = 39900$。此公式要求數列為等差數列，且項數與首末項對應正確。 評分要點：首末項（3 分）、項數（3 分）、總和及條件（3 分）。

8. 某城市人口現時為 5000 人，每年增長率為 3%，以複利方式計算（compound interest）。 (a) 求 5 年後的人口，取整數。 (b) 求最少多少年後人口會超過現時的兩倍。 (c) 若增長率改為每年 5%，所需年數會增加還是減少？簡略解釋。

答案：(a) 人口 $= 5000 \times 1.03^5 \approx 5796.37$，即約 5796 人。 (b) 需 1.03^n 大於 2；$1.03^{23} \approx 1.974$、$1.03^{24} \approx 2.033$，故最少 24 年。 (c) 增長率較高，每年倍數 1.05 大於 1.03，所需年數會減少（約 15 年）。 評分要點：5 年後人口（4 分）、倍增年數（4 分）。

丙部：排列組合、概率與統計（第 9 – 12 題）

概率答案可用分數或小數表示；小數須取三位有效數字，並註明單位。

9. 某班有 5 名男生及 4 名女生，現從中選出 3 人組成委員會。 (a) 求所有可能的組合數目。 (b) 求委員會中至少有一名女生的組合數目。 (c) 求委員會中恰有一名女生的組合數目，並核對 (b) 與 (c) 的對應。

答案：(a) 組合數目 $= C(9, 3) = 84$。 (b) 全部為男生的組合有 $C(5, 3) = 10$ 個，故至少一名女生 $= 84 - 10 = 74$。 (c) 恰有一名女生 $= C(4, 1) \times C(5, 2) = 4 \times 10 = 40$；兩名女生 $= C(4, 2) \times C(5, 1) = 30$，三名女生 $= C(4, 3) = 4$，故 $40 + 30 + 4 = 74$，與 (b) 一致。 評分要點：總組合（3 分）、至少一名女生（3 分）、恰一名女生及核對（3 分）。

10. 7 名學生排成一行拍照，其中甲、乙兩人必須相鄰。 (a) 求所有排列的數目。 (b) 求甲、乙相鄰的排列數目。 (c) 由此求隨機排列時甲、乙相鄰的概率，答案取三位有效數字。

答案：(a) 7 人全排列 = 7! = 5040。 (b) 把甲、乙視為一個單位，與其餘 5 人共 6 個單位排列，另乘 2 種內部次序：$2 \times 6! = 2 \times 720 = 1440$。 (c) 概率 = $1440 \div 5040 = 2 \div 7 \approx 0.286$。 評分要點：全排列（3 分）、相鄰排列（3 分）、概率（2 分）。

11. 一個袋內有 4 個紅球及 6 個藍球，隨機抽出 2 個球，不放回。 (a) 求兩個都是紅球的概率。 (b) 求至少有一個紅球的概率。 (c) 比較有放回與不放回兩種情況下 (a) 的答案。

答案：(a) 兩個都是紅球的概率 = $C(4, 2) \div C(10, 2) = 6 \div 45 = 2 \div 15 \approx 0.133$。 (b) 至少一個紅球 = $1 - C(6, 2) \div C(10, 2) = 1 - 15 \div 45 = 2 \div 3 \approx 0.667$。 (c) 若有放回，兩個都是紅球的概率 = $(4 \div 10)^2 = 0.16$，大於不放回的 0.133，因為不放回時抽走紅球會令第二次抽到紅球的機會下降。 評分要點：組合計算（4 分）、至少一個紅球（4 分）。

12. 某組數據為 4, 7, 7, 9, 13。 (a) 求平均值及標準差（以母體標準差計算，取三位有效數字）。 (b) 若每個數據同時加 5，求新的平均值及標準差。 (c) 若每個數據同時乘 2，說明平均值與標準差如何改變。

答案：(a) 平均值 = $(4 + 7 + 7 + 9 + 13) \div 5 = 8$；離差平方和 = $16 + 1 + 1 + 1 + 25 = 44.0$，方差 = $44.0 \div 5 = 8.8$，標準差 = $\sqrt{8.8} \approx 2.966$。 (b) 每個數據加 5 後平均值 = 13，標準差不變，仍約為 2.966。 (c) 每個數據乘 2 後平均值變為 2 倍即 16，標準差亦變為 2 倍約 5.93；乘以常數會同時按同一倍數改變平均值與標準差。 評分要點：平均值與標準差（4 分）、加常數的影響（4 分）。

TutorZone 中五（S5）數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。