中五數學練習卷：指數與對數

中四（S5）　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 12 題

甲部：指數定律與指數方程

化簡、求值與指數方程

1. 化簡 (a) $(2x^3)^2 \times 3x^{-4} \div 6x^2$；(b) 求 27^(2/3) + 16^(−1/2) 的值，並寫出所用的指數定律。

答案：（a）$(2x^3)^2 = 4x^6$（2 分），乘以 $3x^{-4}$ 得 $12x^2$（2 分），再除以 $6x^2$ 得 2（1 分）。（b）27^(2/3) = 9（2 分），16^(−1/2) = 1/4，合計 37/4，即 9.25（1 分）。

2. 解指數方程 3^(2x−1) = 27^(x−2)。

答案：（a）把 27 寫成 3^3，右邊化為 3^(3x−6)（4 分）。（b）比較指數得 $2x - 1 = 3x - 6$，解得 $x = 5$（4 分）。

3. 已知 $\log_2 3 = 1.585$，求 (a) $\log_2 48$；(b) $\log_2 0.75$，答案準確至三位小數。

答案：（a）$48 = 16 \times 3$，故 $\log_2 48 = 4 + 1.585 = 5.585$（4 分）。（b）$0.75 = 3 \div 4$，故 $\log_2 0.75 = 1.585 - 2 = -0.415$（4 分）。

4. 解對數方程 $\log_2 (x + 3) + \log_2 (x - 3) = 4$。

答案：（a）合併對數得 $\log_2 (x^2 - 9) = 4$（3 分）。（b）即 $x^2 - 9 = 16$，$x^2 = 25$，得 $x = 5$ 或 $x = -5$（3 分）。（c）真數須為正數，故 $x = 5$，-5 捨去（3 分）。

乙部：對數定律與對數方程

求值、化簡與解對數方程

5. 某細菌種群的數量為 N = 500 × 2^(t/3)，t 以小時計。(a) 求 t = 9 時的數量；(b) 求數量增至 16000 所需的時間。

答案：（a）$N = 500 \times 2^3 = 4000$（4 分）。（b）2^(t/3) = 16000 ÷ 500 = 32 = 2^5（2 分），故 $t/3 = 5$，$t = 15$ 小時（2 分）。

6. 不用計算機，求 (a) $\log_5 125 + \log_4 (1/16)$；(b) $\log_7 49^3$ 的值。

答案：（a）$\log_5 125 = 3$（2 分），$\log_4 (1/16) = -2$（1 分），合計 1（1 分）。（b）$\log_7 49^3 = 3 \times \log_7 49 = 3 \times 2 = 6$（4 分）。

7. 已知 log 2 = 0.3010、log 3 = 0.4771（以 10 為底），求 (a) log 12；(b) log 0.15。

答案：（a）log 12 = 2 log 2 + log 3 = 0.6020 + 0.4771 = 1.0791（4 分）。（b）$0.15 = 3 \div 20$，故 log 0.15 = 0.4771 − 1.3010 = −0.8239（4 分）。

8. 化簡 (a) $\log_a 8 \div \log_a 2$；(b) $\log_a a^3$，其中 a 為正數且 $a \neq 1$。

答案：（a）$\log_a 8 = 3 \log_a 2$，故商為 3（4 分）。（b）$\log_a a^3 = 3 \log_a a = 3$（4 分）。

丙部：圖像與綜合應用

增長、衰減與對數直線圖

9. 解方程 log (x − 1) + log (x + 2) = 1（以 10 為底）。

答案：（a）合併得 log[(x − 1)(x + 2)] = 1（3 分）。（b）即 (x − 1)(x + 2) = 10，整理成 x² + x − 12 = 0（3 分）。（c）解得 x = 3 或 x = −4；因真數須為正數，故 x = 3（3 分）。

10. 解方程 4^x − 5 × 2^x + 4 = 0。

答案：（a）設 u = 2^x，方程變為 u² − 5u + 4 = 0（3 分）。（b）(u − 1)(u − 4) = 0，得 u = 1 或 u = 4（3 分）。（c）2^x = 1 得 x = 0；2^x = 4 得 x = 2（2 分）。

11. 某放射性物質的質量為 m = 80 × (1/2)^(t/5) 克，t 以年計。(a) 求 t = 10 時的質量；(b) 求質量降至 10 克所需的年數。

答案：（a）m = 80 × (1/2)² = 20 克（4 分）。（b）(1/2)^(t/5) = 10 ÷ 80 = 1/8 = (1/2)³（3 分），故 t/5 = 3，t = 15 年（2 分）。

12. 已知 log y = 2 log x + log 3，其中 x 為正數。(a) 求 y 與 x 的關係式；(b) 求 x = 10 時 y 的值。

答案：（a）log y = log x² + log 3 = log(3x²)（4 分），故 y = 3x²。（b）當 x = 10，y = 3 × 10² = 300（3 分），並說明 y 隨 x 增大而增大（2 分）。

TutorZone 中四（S5）數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。