中五數學

中五（S5）　數學（必修部分）　|　時限：75 分鐘　|　總分：100 分　|　共 12 題

甲部：指數、對數與數列（24 分）

每題 6 分，須列式或說明推理。

1. 解下列方程：(a) 3^(2x−1) = 81；(b) $\log_5(2x+3) = 2$。並說明每步所用的指數或對數性質。

答案：(a) 81 = 3^4，故 2x − 1 = 4，x = 2.5。(b) $\log_5(2x+3) = 2$ 即 $2x + 3 = 5^2 = 25$，x = 11。評分要點：同底比較、指數與對數互化、答案。

2. 已知 log 2 = a、log 3 = b。(a) 以 a、b 表示 log 72；(b) 以 a、b 表示 log 4.5；(c) 解釋為何 log 72 的係數與 72 的質因數分解有關。

答案：(a) $72 = 2^3 \times 3^2$，故 $\log 72 = \log 2^3 + \log 3^2 = 3a + 2b$（次方 3 與 2 分別成為 a 與 b 的係數）。(b) $\log 4.5 = \log(9/2) = 2\log 3 - \log 2 = 2b - a$。(c) 對數把乘法化為加法，每個質因數的次方直接成為係數。評分要點：分解、兩條對數式、解釋。

3. 某等差數列首項為 7、公差為 4。(a) 求第 20 項。(b) 求首 20 項之和。(c) 求首 n 項和大於 900 的最小 n。

答案：(a) 第 20 項 = 7 + 19 × 4 = 83。(b) 首 20 項和 = 20(7 + 83)/2 = 900。(c) 首 n 項和 = n(2×7 + (n−1)×4)/2，n = 15 得 570、n = 18 得 792、n = 19 得 874、n = 20 得 900，故最小 n = 20。評分要點：通項、求和公式、比較。

4. 某等比數列首項為 3、公比為 2。(a) 求首 10 項之和。(b) 求最小的 n 使第 n 項大於 1000，並寫出該項。

答案：(a) 首 10 項和 = 3(2^10 − 1)/(2 − 1) = 3069。(b) 第 n 項 = 3 × 2^(n−1)，$2^8 = 256$ 得 768（不大於 1000）、$2^9 = 512$ 得 1536，故最小 n = 10，該項為 1536。評分要點：等比求和、逐次比較、答案。

乙部：二次函數、直線與圓（36 分）

每題 9 分，注意題目各部分的配分。

5. 曲線 $y = x^2 - 6x + 5$。(a) 以 $(x - h)^2 + k$ 形式表示。(b) 寫出頂點與最小值。(c) 求 x 軸截距與 y 軸截距。

答案：(a) $x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 4$。(b) 頂點 (3, -4)，最小值 -4。(c) x 軸截距 x = 1 與 x = 5；y 軸截距 y = 5。評分要點：配方、頂點、三組截距。

6. 直線 L 為 3x + 4y − 12 = 0。(a) 求斜率。(b) 求 x 軸截距與 y 軸截距。(c) 求原點到 L 的垂直距離。

答案：(a) $4y = -3x + 12$，$y = -(3/4)x + 3$，斜率 $-3/4$。(b) x 軸截距 (4, 0)、y 軸截距 (0, 3)。(c) 距離 $= |-12|/\sqrt{(3^2 + 4^2)} = 12/5 = 2.4$。評分要點：整理為斜截式、兩截距、點線距離公式。

7. 圓 C 的方程為 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$。(a) 求圓心與半徑。(b) 證明點 (6, 0) 在 C 上。(c) 求圓與 x 軸相交所得弦的長度。

答案：(a) $x^2 - 4x + y^2 + 6y = 12$，$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4 + 9 + 12 = 25$，圓心 (2, -3)、半徑 5。(b) 代入 (6, 0)：36 + 0 − 24 + 0 − 12 = 0，故在圓上。(c) 令 y = 0 得 $x^2 - 4x - 12 = 0$，x = 6 或 x = -2，弦長 = 8。評分要點：配方法、代入驗證、弦長。

8. 方程 $x^2 - 8x + k = 0$。(a) 求 k 的範圍使方程有兩個相異實根。(b) 若兩根均為正數，求 k 的範圍。(c) 當 $k = 12$ 時解該方程。

答案：(a) 判別式 $= 64 - 4k$ 大於 0，故 k 小於 16。(b) 兩根和 $= 8$ 大於 0，兩根積 $= k$ 大於 0，故 0 小於 k 小於 16。(c) $x^2 - 8x + 12 = 0$，$(x - 2)(x - 6) = 0$，$x = 2$ 或 $x = 6$。評分要點：判別式、根與係數關係、因式分解。

丙部：概率與統計（40 分）

每題 10 分，須作完整計算或解釋。

9. 袋中有 5 個紅球、3 個藍球、2 個綠球。隨機抽出兩個球（不放回）。(a) 求兩個皆為紅球的概率。(b) 求兩球同色的概率。(c) 求最少有一個紅球的概率。

答案：(a) 兩個皆紅 $= (5/10) \times (4/9) = 2/9$。(b) 同色 $= (5\times4 + 3\times2 + 2\times1)/(10\times9) = 14/45$。(c) 最少一紅 $= 1 -$ 兩個皆非紅 $= 1 - (5\times4)/(10\times9) = 7/9$。評分要點：不放回、互斥情況相加、補集。

10. 數據組為 2, 4, 6, 8, 10。(a) 求平均數、中位數與眾數。(b) 求全距。(c) 求方差與標準差。(d) 若每個數據加 5，平均數、方差與標準差如何變化？

答案：(a) 平均數 $= 30/5 = 6$，中位數 $= 6$，各值只出現一次故無眾數。(b) 全距 $= 10 - 2 = 8$。(c) 方差 $= 40/5 = 8$，標準差 $= \sqrt{8} \approx 2.83$。(d) 每個數據加 5 後平均數變 11；方差與標準差不變（平移不改變離散程度）。評分要點：三個集中趨勢、全距、方差與標準差、平移性質。

11. 某考試成績呈正態分佈，平均數 60 分、標準差 10 分。(a) 寫出平均數加減一個及兩個標準差所覆蓋的百分比。(b) 估計高於 80 分的考生百分比。(c) 最高 16% 獲 A 級，估計 A 級的分數界線。

答案：(a) 平均數 ± 1 標準差約覆蓋 68%，± 2 標準差約覆蓋 95%，± 3 標準差約覆蓋 99.7%。(b) 80 分為平均數加兩個標準差，高於此約佔 $(100\% - 95\%)/2 = 2.5\%$。(c) 84% 的考生低於 70 分（平均數加一個標準差），故最高 16% 的界線約為 70 分。評分要點：經驗法則、尾部百分比、界線。

12. 從 6 名男生與 4 名女生中選 3 人組隊。(a) 求不同隊伍的數目。(b) 求最少有一位女生的隊伍數目。(c) 求隊伍恰好有兩位女生的概率。

答案：(a) 隊伍數目 $= C(10, 3) = 120$。(b) 全男組合 $= C(6, 3) = 20$，故最少一女 $= 120 - 20 = 100$。(c) 恰兩女一男 $= C(4, 2) \times C(6, 1) = 6 \times 6 = 36$，概率 $= 36/120 = 3/10$。評分要點：組合公式、補集、乘法原理。

TutorZone 中五（S5）數學（必修部分）練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。