中六數學練習卷：微分與積分入門

中六（S6）　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 12 題

甲部 導數、求導法則與切線法線（4 題，28 分）

回答下列各題，須列出解題步驟。

1. 設 $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$。(a) 用求導法則求 $f'(x)$。(b) 由此求 $f'(2)$。

答案：$f'(x) = 6x - 4$，3 分（兩項各 1.5 分）。$f'(2) = 6(2) - 4 = 8$，3 分。

2. 用基本原理（極限定義）求 $g(x) = x^2$ 在 $x = 3$ 的導數，並清楚列出步驟。

答案：$g'(3) = \lim_{h\to 0} [(3+h)^2 - 9] / h = \lim_{h\to 0} (6h + h^2)/h = \lim_{h\to 0} (6 + h) = 6$。展開 2 分、化簡 2 分、取極限 2 分。

3. 求曲線 $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ 的駐點，並用二階導數判別各駐點的性質。

答案：$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$，2 分；駐點為 $x = 1$ 與 $x = 3$，2 分；$y'' = 6x - 12$，$x = 1$ 時 $y'' = -6$，小於 0，故 $(1, 4)$ 為極大點，2 分；$x = 3$ 時 $y'' = 6$，大於 0，故 $(3, 0)$ 為極小點，2 分。

4. 求 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ 的極大值與極小值，並指出對應的 x 值。

答案：$y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x - 2)(x + 1)$，2 分；$x = 2$ 或 $x = -1$，2 分；$y'' = 12x - 6$，$x = -1$ 時 $y'' = -18$，小於 0，極大值 $y = 12$，2 分；$x = 2$ 時 $y'' = 18$，大於 0，極小值 $y = -15$，2 分。

乙部 積分法、面積與運動學（4 題，32 分）

積分題須寫出原函數，並清楚標明上下限。

5. 求下列不定積分：(a) $\int (6x^2 - 4x + 3)\,dx$；(b) $\int (8x^{-3} + 5)\,dx$。

答案：(a) $2x^3 - 2x^2 + 3x + C$，4 分（三項各 1 分，常數 C 1 分）。(b) $8x^{-2}/(-2) + 5x + C = -4/x^2 + 5x + C$，4 分（每項 1.5 分，C 1 分）。

6. 計算定積分 $\int_{1}^{3} (x^2 + 2x)\,dx$，須列出原函數及代入步驟。

答案：原函數為 $x^3/3 + x^2$，3 分；上限代入：$9 + 9 = 18$；下限代入：$1/3 + 1 = 4/3$；$18 - 4/3 = 50/3$，約 16.7，5 分。

7. 求曲線 $y = 4x - x^2$ 與 x 軸所圍成的區域面積。

答案：與 x 軸交於 $x = 0$ 與 $x = 4$，2 分；面積 $= \int_{0}^{4} (4x - x^2)\,dx$，2 分；$= [2x^2 - x^3/3]_{0}^{4} = 32 - 64/3 = 32/3$，約 10.7 平方單位，4 分。

8. 某粒子沿直線運動，速度為 $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$（單位：m/s），$t \geqslant 0$。(a) 求 $t = 2$ 時粒子的加速度。(b) 求 $t = 0$ 至 $t = 4$ 之間粒子的位移。

答案：(a) $a(t) = v'(t) = 6t - 12$，$t = 2$ 時加速度為 0 m/s²，3 分。(b) 位移 $= \int_{0}^{4} v\,dt = [t^3 - 6t^2 + 9t]_{0}^{4} = 64 - 96 + 36 = 4$ m，5 分。

丙部 最優化、相關速率與估算（4 題，40 分）

應用題須設未知數、寫出目標函數或關係，並標明單位。

9. 一塊長方形農地一邊靠牆，其餘三邊用 60 m 圍欄圍起。設垂直牆的兩邊各長 x m。(a) 以 x 表示面積 A。(b) 求 A 的最大值及對應的 x 值。

答案：(a) 另一邊為 (60 - 2x) m，$A = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2$，3 分。(b) $dA/dx = 60 - 4x = 0$，得 $x = 15$，3 分；$d^2A/dx^2 = -4$，小於 0，故為極大，2 分；$A = 15 \times 30 = 450\ m^2$，2 分。

10. 曲線為 $y = x^2 - 3x + 4$，求在 $x = 2$ 處的切線方程與法線方程。

答案：切點 $y(2) = 2$，即 (2, 2)，1 分；$y' = 2x - 3$，切線斜率為 1，3 分；切線 $y - 2 = 1(x - 2)$，即 $y = x$，3 分；法線斜率為 -1，$y - 2 = -(x - 2)$，即 $y = -x + 4$，3 分。

11. 一個球形氣球的體積以 30 cm³/s 的速率增加，體積 $V = (4/3)\pi r^3$。當半徑 $r = 5$ cm 時，求半徑增加的速率。

答案：$dV/dr = 4\pi r^2$，3 分；由連鎖律 $dV/dt = (dV/dr)(dr/dt)$，2 分；$30 = 4\pi(25)(dr/dt)$，2 分；$dr/dt = 30/(100\pi) = 0.0955$，約 0.096 cm/s，3 分。

12. 某水缸的入水速率 R(t) 每 2 分鐘量度一次：t = 0、2、4、6、8 分鐘時分別為 4、7、9、8、5（單位：L/min）。(a) 用梯形法則估計首 8 分鐘的總入水量。(b) 說明此估計值可能偏高還是偏低，並解釋原因。

答案：(a) 梯形法則，$h = 2$：面積 $\approx (2/2)[4 + 2(7 + 9 + 8) + 5] = 57$ L，6 分（列式 3 分、答案 3 分）。(b) 速率在 $t = 4$ 附近達峰，曲線凹向下，梯形以直線連接會高估，故估計值可能偏高，4 分。

TutorZone 中六（S6）數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。