中六數學練習卷：微分、積分與概率分佈

中六（S6）　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 12 題

甲部：微分及其應用（24 分）

每題 6 分，須列式或說明推理。

1. 設 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$。(a) 求 $\dfrac{dy}{dx}$。(b) 求所有駐點（stationary points）的坐標。(c) 以二階導數判別每個駐點是極大值還是極小值，並寫出對應的極值。

答案：(a) $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2 - 18x + 12$。(b) 令 $6x^2 - 18x + 12 = 0$，即 $6(x-1)(x-2) = 0$，得 $x = 1$ 或 $x = 2$；當 $x = 1$，$y = 5$；當 $x = 2$，$y = 4$，故駐點為 $(1, 5)$ 與 $(2, 4)$（各 1 分）。(c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 12x - 18$。$x = 1$ 時為 $-6 < 0$，故 $(1, 5)$ 為極大點，極大值 5；$x = 2$ 時為 $6 > 0$，故 $(2, 4)$ 為極小點，極小值 4。

2. 曲線 C 的方程為 $y = x^3 - 4x$，P$(2, 0)$ 為 C 上的一點。(a) 求 C 在 P 點的切線斜率。(b) 求 C 在 P 點的切線方程。(c) 求 C 在 P 點的法線方程，並以 $ax + by + c = 0$ 的形式表示。

答案：(a) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 4$，在 $x = 2$ 時斜率 $= 8$。(b) 切線：$y - 0 = 8(x - 2)$，即 $y = 8x - 16$。(c) 法線斜率 $= -1/8$，故 $y - 0 = -(1/8)(x - 2)$，即 $x + 8y - 2 = 0$。

3. 一個球體的半徑 r cm 以每秒 0.5 cm 的速率增加。體積 $V = (4/3)\pi r^3$。(a) 求 $\dfrac{dV}{dr}$。(b) 當 $r = 6$ 時，求 $\dfrac{dV}{dt}$（答案以 π 表示，並取 2 位小數）。(c) 由此估算半徑由 6 cm 增至 6.1 cm 時體積的增加量。

答案：(a) $\dfrac{dV}{dr} = 4\pi r^2$。(b) $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dr}\cdot\dfrac{dr}{dt} = 4\pi(6)^2(0.5) = 72\pi \approx 226.19$ cm³/s。(c) 體積增加 $\approx \dfrac{dV}{dr} \times 0.1 = 144\pi \times 0.1 = 14.4\pi \approx 45.24$ cm³。

4. 一條長 40 cm 的鐵線圍成一個長方形。設長為 x cm。(a) 以 x 表示長方形的面積 A。(b) 求使 A 為極大的 x，並證明該值確實給出極大面積。(c) 求該最大面積，並指出此時長方形的形狀。

答案：(a) $2x + 2y = 40$，故 $y = 20 - x$，$A = x(20 - x) = 20x - x^2$。(b) $\dfrac{dA}{dx} = 20 - 2x$，令其為 0 得 $x = 10$；$\dfrac{d^2A}{dx^2} = -2 < 0$，故 $x = 10$ 給出極大值。(c) $A = 10 \times 10 = 100$ cm²，此時長 = 闊 = 10 cm，即正方形。

乙部：積分與面積、體積（36 分）

每題 9 分，注意題目各部分的配分。

5. 設 $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$。(a) 求 $\int f(x)\,dx$。(b) 求 $\int_0^2 f(x)\,dx$ 的值。(c) 由此求曲線 $y = f(x)$、x 軸、$x = 0$ 與 $x = 2$ 所圍區域的面積，並說明為何面積相等於 (b) 的答案。

答案：(a) $\int (6x^2 - 4x + 3)\,dx = 2x^3 - 2x^2 + 3x + C$。(b) $[2x^3 - 2x^2 + 3x]_0^2 = (16 - 8 + 6) - 0 = 14$。(c) 判別式 $= (-4)^2 - 4(6)(3) = -56 < 0$，且首項係數 $6 > 0$，故 $f(x)$ 恆為正，圖形全在 x 軸上方，所以面積 = 定積分值 = 14 平方單位。

6. 曲線 $y = x^2$ 與直線 $y = 2x$ 相交於兩點。(a) 求這兩個交點。(b) 求兩者所圍區域的面積。(c) 將該區域繞 x 軸旋轉一周，求所得的旋轉體體積（以 π 表示）。

答案：(a) $x^2 = 2x$，即 $x(x - 2) = 0$，交點為 $(0, 0)$ 與 $(2, 4)$。(b) 在 $0 < x < 2$ 內 $2x > x^2$，面積 $= \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = [x^2 - x^3/3]_0^2 = 4 - 8/3 = 4/3$ 平方單位。(c) $V = \pi\int_0^2 [(2x)^2 - (x^2)^2]\,dx = \pi[4x^3/3 - x^5/5]_0^2 = \pi(32/3 - 32/5) = 64\pi/15 \approx 13.40$ 立方單位。

7. 曲線 $y = x^2 + 1$ 與直線 $x = -1$ 及 $x = 2$。(a) 求 $\int_{-1}^{2} (x^2 + 1)\,dx$。(b) 由此求曲線、x 軸與該兩直線所圍區域的面積。(c) 用 $h = 1$ 的梯形法則估算同一面積，並求它與 (b) 的準確值之差。

答案：(a) $[x^3/3 + x]_{-1}^{2} = (8/3 + 2) - (-1/3 - 1) = 14/3 + 4/3 = 6$。(b) 因為 $x^2 + 1 > 0$，曲線在 x 軸上方，故面積 = 6 平方單位。(c) 梯形法則：$h = 1$，y 值依次為 2, 1, 2, 5，估算值 $= 1 \times [(2 + 5)/2 + 1 + 2] = 6.5$；與準確值之差 $= 6.5 - 6 = 0.5$（高估，因曲線向上彎）。

8. 某質點沿直線運動，在時間 t 秒（$0 \leqslant t \leqslant 4$）的速度為 $v = 3t^2 - 12t + 9$ m/s。(a) 求質點靜止的時刻。(b) 求 $t = 0$ 至 $t = 4$ 之間的位移。(c) 求 $t = 0$ 至 $t = 4$ 之間質點所走的總路程。

答案：(a) $3t^2 - 12t + 9 = 0$，即 $3(t - 1)(t - 3) = 0$，故 $t = 1$ 或 $t = 3$ 秒。(b) 位移 $= \int_0^4 v\,dt = [t^3 - 6t^2 + 9t]_0^4 = (64 - 96 + 36) - 0 = 4$ m。(c) v 在 (1, 3) 內為負，故須分段取絕對值：$|s(1) - s(0)| = 4$、$|s(3) - s(1)| = 4$、$|s(4) - s(3)| = 4$，總路程 $= 4 + 4 + 4 = 12$ m。

丙部：概率分佈（40 分）

每題 10 分，須作完整計算或解釋。

9. 設 $X \sim B(10, 0.3)$。(a) 求 $P(X = 3)$（取 4 位小數）。(b) 求 $E(X)$ 與 $\mathrm{Var}(X)$。(c) 求 $P(X \leqslant 1)$（取 4 位小數）。

答案：(a) $P(X = 3) = C(10,3)(0.3)^3(0.7)^7 = 120 \times 0.027 \times 0.0823543 \approx 0.2668$。(b) $E(X) = 10 \times 0.3 = 3$；$\mathrm{Var}(X) = 10 \times 0.3 \times 0.7 = 2.1$。(c) $P(X \leqslant 1) = 0.7^{10} + 10(0.3)(0.7)^9 \approx 0.0282475 + 0.1210608 \approx 0.1493$。

10. 某射擊運動員每次射擊命中的概率為 0.25，各次射擊互相獨立。他射擊 8 次，設 X 為命中的次數。(a) 求 $P(X = 0)$。(b) 求 $P(X \geqslant 2)$。(c) 求 $P(X \leqslant 3)$，並判斷「命中至少 4 次」是否為罕見事件。

答案：(a) $P(X = 0) = 0.75^8 \approx 0.1001$。(b) $P(X \geqslant 2) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - 0.1001 - 0.2670 \approx 0.6329$。(c) $P(X \leqslant 3) \approx 0.1001 + 0.2670 + 0.3115 + 0.2076 \approx 0.8862$，故 $P(X \geqslant 4) \approx 0.1138$；約 11.4%，並非罕見事件（一般以 5% 為界）。

11. 設 $X \sim N(50, 25)$。(a) 求 $P(X > 58)$。(b) 求 $P(44 < X < 58)$。(c) 求 k 使得 $P(X < k) = 0.9$（已知 $P(Z < 1.28) = 0.8997$）。

答案：(a) $Z = (58 - 50)/5 = 1.6$，$P(X > 58) = P(Z > 1.6) = 1 - 0.9452 = 0.0548$。(b) $Z_1 = (44 - 50)/5 = -1.2$，$Z_2 = 1.6$；$P = 0.9452 - 0.1151 = 0.8301$。(c) 由 $P(Z < 1.28) = 0.8997$，$k = 50 + 1.28 \times 5 = 56.4$。

12. 設離散隨機變數 X 的概率分佈為 $P(X = x) = k(x + 1)$，其中 $x = 0, 1, 2, 3$。(a) 求 k。(b) 求 $E(X)$。(c) 求 $\mathrm{Var}(X)$ 與標準差。

答案：(a) 所有概率之和為 1：$k(1 + 2 + 3 + 4) = 10k = 1$，故 $k = 0.1$。(b) $E(X) = 0(0.1) + 1(0.2) + 2(0.3) + 3(0.4) = 2.0$。(c) $E(X^2) = 0 + 0.2 + 4(0.3) + 9(0.4) = 5.0$，$\mathrm{Var}(X) = 5.0 - 2.0^2 = 1.0$，標準差 $= 1.0$。

TutorZone 中六（S6）數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。