# 中六數學練習卷：微分、積分與概率分佈

中六（S6）　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 12 題

## 甲部：微分及其應用（24 分）

每題 6 分，須列式或說明推理。

1. 設 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$。(a) 求 $\dfrac{dy}{dx}$。(b) 求所有駐點（stationary points）的坐標。(c) 以二階導數判別每個駐點是極大值還是極小值，並寫出對應的極值。

2. 曲線 C 的方程為 $y = x^3 - 4x$，P(2, 0) 為 C 上的一點。(a) 求 C 在 P 點的切線斜率。(b) 求 C 在 P 點的切線方程。(c) 求 C 在 P 點的法線方程，並以 $ax + by + c = 0$ 的形式表示。

3. 一個球體的半徑 $r$ cm 以每秒 0.5 cm 的速率增加。體積 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$。(a) 求 $\dfrac{dV}{dr}$。(b) 當 $r = 6$ 時，求 $\dfrac{dV}{dt}$（答案以 $\pi$ 表示，並取 2 位小數）。(c) 由此估算半徑由 6 cm 增至 6.1 cm 時體積的增加量。

4. 一條長 40 cm 的鐵線圍成一個長方形。設長為 $x$ cm。(a) 以 $x$ 表示長方形的面積 $A$。(b) 求使 $A$ 為極大的 $x$，並證明該值確實給出極大面積。(c) 求該最大面積，並指出此時長方形的形狀。

## 乙部：積分與面積、體積（36 分）

每題 9 分，注意題目各部分的配分。

5. 設 $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$。(a) 求 $\int f(x)\,dx$。(b) 求 $\int_0^{2} f(x)\,dx$ 的值。(c) 由此求曲線 $y = f(x)$、$x$ 軸、$x = 0$ 與 $x = 2$ 所圍區域的面積，並說明為何面積相等於 (b) 的答案。

6. 曲線 $y = x^2$ 與直線 $y = 2x$ 相交於兩點。(a) 求這兩個交點。(b) 求兩者所圍區域的面積。(c) 將該區域繞 $x$ 軸旋轉一周，求所得的旋轉體體積（以 $\pi$ 表示）。

7. 曲線 $y = x^2 + 1$ 與直線 $x = -1$ 及 $x = 2$。(a) 求 $\int_{-1}^{2} (x^2 + 1)\,dx$。(b) 由此求曲線、$x$ 軸與該兩直線所圍區域的面積。(c) 用 $h = 1$ 的梯形法則估算同一面積，並求它與 (b) 的準確值之差。

8. 某質點沿直線運動，在時間 $t$ 秒（$0 \leqslant t \leqslant 4$）的速度為 $v = 3t^2 - 12t + 9$ m/s。(a) 求質點靜止的時刻。(b) 求 $t = 0$ 至 $t = 4$ 之間的位移。(c) 求 $t = 0$ 至 $t = 4$ 之間質點所走的總路程。

## 丙部：概率分佈（40 分）

每題 10 分，須作完整計算或解釋。

9. 設 $X \sim B(10, 0.3)$。(a) 求 $P(X = 3)$（取 4 位小數）。(b) 求 $E(X)$ 與 $\mathrm{Var}(X)$。(c) 求 $P(X \leqslant 1)$（取 4 位小數）。

10. 某射擊運動員每次射擊命中的概率為 0.25，各次射擊互相獨立。他射擊 8 次，設 $X$ 為命中的次數。(a) 求 $P(X = 0)$。(b) 求 $P(X \geqslant 2)$。(c) 求 $P(X \leqslant 3)$，並判斷「命中至少 4 次」是否為罕見事件。

11. 設 $X \sim N(50, 25)$。(a) 求 $P(X > 58)$。(b) 求 $P(44 < X < 58)$。(c) 求 $k$ 使得 $P(X < k) = 0.9$（已知 $P(Z < 1.28) = 0.8997$）。

12. 設離散隨機變數 $X$ 的概率分佈為 $P(X = x) = k(x + 1)$，其中 $x = 0, 1, 2, 3$。(a) 求 $k$。(b) 求 $E(X)$。(c) 求 $\mathrm{Var}(X)$ 與標準差。

---

TutorZone 中六（S6）數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。