中六物理練習卷：萬有引力與衛星運動

中六（S6）　物理　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 12 題

甲部（多項短答，29 分）

全部題目均須作答，須列出所用公式及代入的數值。

1. 地球質量 5.97×10^{24} kg、半徑 6.37×10^{6} m，重力常數 $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{N m}^2\text{ kg}^{-2}$。(a) 求地球表面重力加速度 g_0。(b) 求距地面 1.0×10^{7} m 處的重力加速度。(c) 求 g_0 與 (b) 之比。

答案：(a) $g_0 = GM/R^2 = (6.67\times10^{-11})(5.97\times10^{24})/(6.37\times10^{6})^2 = 9.81\ \text{m s}^{-2}$（2 分） (b) $r = R + h = 1.637 \times 10^{7}$ m，$g = GM/r^2 = 1.49\ \text{m s}^{-2}$（2 分） (c) 比值 $= 9.81/1.49 = 6.60$（2 分） 評分要點：必須用 $r = R + h$；只代 R 得 1 分。

2. 月球繞地球運行的軌道半徑約 3.84×10^{8} m。(a) 以圓周運動模型求月球的公轉週期（以日為單位）。(b) 說明為何月球不會掉到地球上。(c) 若月球質量加倍而軌道半徑不變，週期會否改變？解釋。

答案：(a) $GMm/r^2 = m(4\pi^2 r/T^2) \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{(r^3/GM)} = 2369336\ \text{s} = 27.4$ 日（3 分） (b) 月球有足夠切向速度，其「下落」量剛好等於地球表面彎曲的程度，故一直繞行（2 分） (c) 週期不變（1 分）：T 只取決於中心天體質量與軌道半徑，與衛星自身質量無關（1 分）

3. 一枚人造衛星在離地 400 km 的圓軌道運行，地球半徑取 6.37×10^{6} m。(a) 求其軌道半徑。(b) 求其速率。(c) 求其週期（以分鐘為單位）。(d) 若衛星質量加倍，速率如何改變？

答案：(a) $r = 6.37\times10^{6} + 4.0\times10^{5} = 6.77 \times 10^{6}$ m（1 分） (b) $v = \sqrt{(GM/r)} = 7669\ \text{m s}^{-1}$（3 分） (c) $T = 2\pi r/v = 5546\ \text{s} = 92.4$ 分鐘（3 分） (d) 不變（1 分）：m 在方程兩邊相消。

4. (a) 由能量守恆推導地球表面的逃逸速度 $v = \sqrt{(2GM/R)}$。(b) 代入數據求數值（km s^{-1}）。(c) 解釋為何逃逸速度與拋體質量無關。

答案：(a) $\tfrac{1}{2}mv^2 - GMm/R = 0$（1 分）$\Rightarrow v = \sqrt{(2GM/R)}$（2 分） (b) $v = \sqrt{(2(6.67\times10^{-11})(5.97\times10^{24})/6.37\times10^{6})} = 11181\ \text{m s}^{-1} = 11.18\ \text{km s}^{-1}$（3 分） (c) 動能與位能都正比於 m，m 在能量方程中相消，故與質量無關（2 分） 評分要點：只寫答案無推導最多 4 分。

乙部（計算與解釋，33 分）

重力常數 $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{N m}^2\text{ kg}^{-2}$，地球質量 5.97×10^{24} kg，地球半徑 6.37×10^{6} m。

5. 火星質量 6.42×10^{23} kg、半徑 3.39×10^{6} m。(a) 求火星表面重力加速度。(b) 比較火星與地球表面的 g 值，並解釋差異的兩個原因。(c) 一個在地球重 600 N 的儀器在火星表面重多少？

答案：(a) $g = GM/R^2 = (6.67\times10^{-11})(6.42\times10^{23})/(3.39\times10^{6})^2 = 3.73\ \text{m s}^{-2}$（3 分） (b) 火星 g 較小（1 分）：火星質量約為地球的 0.107 倍，而半徑約為 0.532 倍；$g \propto M/R^2$，質量因素影響較大（2 分） (c) 質量 $= 600/9.81 = 61.2$ kg，火星上重量 $= 61.2 \times 3.73 = 228$ N（2 分）

6. 地球同步衛星的週期等於地球自轉週期 86 164 s。(a) 求其軌道半徑。(b) 求其離地高度。(c) 說明為何同步衛星必須位於赤道上方。

答案：(a) $r = (GMT^2/4\pi^2)^{\wedge}(1/3) = 4.21 \times 10^7$ m（3 分） (b) 高度 $= r - R = 3.58 \times 10^7$ m $\approx 3.58 \times 10^7$ m（2 分） (c) 只有赤道平面上的軌道，衛星的向心加速度才與地心引力方向共線；否則引力有指向赤道方向的分量，軌道會漂移（3 分） 評分要點：(c) 只答「要對準地面」不給分。

7. 質量 1200 kg 的衛星由 400 km 圓軌道轉移到地球同步軌道（半徑 4.22×10^7 m）。(a) 寫出圓軌道總機械能的表達式。(b) 求每千克所需的能量。(c) 求該衛星所需的總能量。(d) 這些能量從何而來？

答案：(a) $E = -GMm/2r$（2 分） (b) $\Delta E/m = (GM/2)(1/r_1 - 1/r_2) = 2.47 \times 10^7$ J kg⁻¹（3 分） (c) $\Delta E = 1200 \times 2.47 \times 10^7 = 2.96 \times 10^{10}$ J（2 分） (d) 由星上推進器燃燒化學燃料提供，能量來自燃料的化學能（2 分） 評分要點：(a) 漏負號不扣分；用 $GMm(1/r_1 - 1/r_2)$ 當成總能量扣 1 分。

8. 雙星系統由兩顆質量均為 1.5 $M_\odot$（$M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg）的恒星組成，兩星相距 2.0×10^{11} m，繞共同質心作圓周運動。(a) 求每顆星的軌道半徑。(b) 求其速率。(c) 求公轉週期（以日為單位）。(d) 若兩星質量不同，質心位置如何改變？

答案：(a) 每顆星軌道半徑 $= a/2 = 1.0 \times 10^{11}$ m（2 分） (b) $Gm^2/a^2 = mv^2/(a/2) \Rightarrow v = \sqrt{(Gm/2a)} = 2.23 \times 10^4$ m s⁻¹（3 分） (c) $T = 2\pi(a/2)/v = 28169811$ s $= 326$ 日（3 分） (d) 質心靠近質量較大的一方，兩星軌道半徑之比等於質量之反比（1 分）

丙部（綜合與應用，38 分）

數值答案須準確至三位有效數字；解釋題須指出所依據的物理定律。

9. 下表為某行星一顆衛星的觀測數據：軌道半徑 $r = 7.00 \times 10^6$ m，週期 $T = 5.82 \times 10^3$ s。(a) 由 r 與 T 求行星質量。(b) 寫出所用的公式並說明為何不需要衛星質量。(c) 若測得的 T 偏小 2%，對質量的計算有何影響？

答案：(a) $GM = 4\pi^2r^3/T^2 = 3.98 \times 10^{14}$ m³ s⁻² $\Rightarrow M = 5.99 \times 10^{24}$ kg（3 分） (b) 公式 $T^2 = 4\pi^2r^3/(GM)$（1 分）；衛星質量在方程兩邊相消，只充當「探測器」（2 分） (c) T 偏小 2% $\Rightarrow T^2$ 偏小約 4% $\Rightarrow$ 算出的 M 偏大 4%（3 分） 評分要點：(c) 只寫「偏大」不給分，要有 4% 這個量。

10. 地球自轉週期 86 164 s。(a) 求赤道處因自轉所需的向心加速度。(b) 求赤道處的有效 g 值。(c) 解釋為何赤道處的 g 比極地小。(d) 在軌道上的太空人為何感到「失重」？

答案：(a) $a = \omega^2R = (2\pi/86164)^2(6.37 \times 10^6) = 0.034$ m s⁻²（3 分） (b) $g_{eff} = 9.81 - 0.034 = 9.78$ m s⁻²（2 分） (c) 赤道處自轉半徑最大、向心加速度最大，且地球為扁球體使極地半徑較小、$g \propto 1/R^2$ 較大（2 分） (d) 太空人與太空船同以重力加速度自由下落，座椅對人無支持力，視重為零（2 分）

11. 一枚衛星在 400 km 圓軌道（$v = 7.67$ km s⁻¹）運行，現要脫離地球引力。(a) 求該高度的逃逸速度。(b) 求所需的速度增量。(c) 為何不在地面一次過加速到 11.2 km s⁻¹ 更省能量？以能量角度解釋。

答案：(a) $v_{esc} = \sqrt{2} \times v = 1.414 \times 7.67 = 10.85$ km s⁻¹（3 分） (b) $\Delta v = 10.85 - 7.67 = 3.18$ km s⁻¹（3 分） (c) 在地面加速要同時克服整段引力位能，且大氣阻力大；先在軌道加速只需補足由該處逃逸的位能差，能量需求較小（4 分） 評分要點：(c) 必須提及大氣阻力或位能差其一，兩者齊全給滿分。

12. 某行星表面 $g = 3.73\ \text{m s}^{-2}$，半徑 $3.39 \times 10^{6}\ \text{m}$。(a) 求其平均密度。(b) 若某天體半徑相同但密度加倍，表面 g 如何改變？(c) 一個單擺在該行星上的週期與在地球上相比如何？(d) 提出一個由觀測驗證密度的可行方法。

答案： (a) $g = GM/R^2 \Rightarrow M = gR^2/G$；$\rho = M/(\tfrac{4}{3}\pi R^3) = 3g/(4\pi GR) = 3934\ \text{kg m}^{-3}$（4 分） (b) ρ 加倍 $\Rightarrow$ M 加倍 $\Rightarrow$ g 加倍 $= 7.45\ \text{m s}^{-2}$（2 分） (c) $T = 2\pi\sqrt{L/g}$，g 較小 $\Rightarrow$ 週期較長，比值 $\sqrt{9.81/3.73} = 1.62$ 倍（2 分） (d) 發射探測器測量環繞該行星的衛星軌道半徑與週期，由 $T^2 = 4\pi^2 r^3/(GM)$ 求 M，再配合半徑求密度（2 分）

TutorZone 中六（S6）物理練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。