中六数学（延伸部分单元一 M1）练习卷：二项式定理与数列、指数与对数、求导法、积分与应用、二项与泊松分布、正态分布与点估计（100 分）

年级：中六 | 科目：数学（M1） | 时限：75 分钟 | 总分：100 分 | 题数：24 | 答案版

甲部：二项式定理与数列（18 分）

须列出步骤；二项式系数可用 C(n, r) 表示，数列题须写出公式再代入。

#	题目	答案	分数
1	展开 (1 + 2x)^5，并求 x^3 项与 x^2 项的系数。	由二项式定理，x^3 项系数 = C(5,3)×2^3 = 10×8 = 80；x^2 项系数 = C(5,2)×2^2 = 10×4 = 40。全式为 1 + 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5（代 x = 1 核对总和 = 243 = 3^5 ）。	5
2	在 (2 + x)^6 的展开式中，求常数项及 x^4 项的系数。	通项 = C(6,r)×2^(6–r)×x^r。常数项（r = 0）= 2^6 = 64；x^4 项系数 = C(6,4)×2^2 = 15×4 = 60。	5
3	等差数列首项为 5、公差为 3，求第 10 项及首 10 项之和。	T(10) = a + 9d = 5 + 9×3 = 32；S(10) = (10/2)[2a + 9d] = 5×(10 + 27) = 185。	4
4	等比数列首项为 3、公比为 2，求第 6 项及首 6 项之和。	T(6) = a r^5 = 3×2^5 = 96；S(6) = a(r^6 − 1)/(r − 1) = 3(64 − 1)/1 = 189。	4

乙部：指数与对数（17 分）

解方程时须写出所用对数律；答案如非整数须取三位有效数字。

#	题目	答案	分数
5	解方程 2^(x + 1) = 32。	32 = 2^5 ，故 x + 1 = 5，x = 4。	4
6	不用计算机，求 (a) $\log_3 81$，(b) $\log_2 (1/8)$。	(a) 81 = 3^4，故 $\log_3 81 = 4$；(b) 1/8 = 2^{-3}，故 $\log_2 (1/8) = -3$。	4
7	解方程 $\log_2 x + \log_2 (x - 2) = 3$，并解释为何要剔除其中一个根。	合并得 $\log_2[x(x - 2)] = 3$，故 x(x − 2) = 8，$x^2 - 2x - 8 = 0$，(x − 4)(x + 2) = 0。x = 4 或 x = –2；因 log 的真数须为正，x > 2，故只取 x = 4。	5
8	某人存入 $5000，年利率 5%，按年复利。问最少多少年后本利和不少于 $8000？	解 $5000(1.05)^n \geq 8000$，即 $1.05^n \geq 1.6$，n ≥ log 1.6 / log 1.05 ≈ 9.633，故 n = 10 年（金额 ≈ $8,144.47）。	4

丙部：求导法（17 分）

须清楚写出所用法则（链式法则、积法则或隐函数求导）；答案须化简。

#	题目	答案	分数
9	设 $y = (2x + 3)^5$，求 dy/dx，并求 $x = 1$ 时 dy/dx 的值。	用链式法则：$dy/dx = 5(2x + 3)^4 \times 2 = 10(2x + 3)^4$；代入 $x = 1$ 得 $10 \times 5^4 = 6250$。	5
10	设 $y = x^2 \ln x$（$x > 0$），求 dy/dx，并求 $x = e$ 时 dy/dx 的值（取三位有效数字）。	用积法则：$dy/dx = 2x \ln x + x^2 \times (1/x) = 2x \ln x + x$；代入 $x = e$ 得 $2e \ln e + e = 3e \approx 8.15$。	4
11	曲线 $x^2 + y^2 = 25$，求在点 $(3, 4)$ 的切线斜率。	隐函数求导：$2x + 2y(dy/dx) = 0$，故 $dy/dx = -x/y$；在 $(3, 4)$ 斜率 $= -3/4 = -0.75$。	4
12	求 $\lim_{x \to 0} (\sin 3x) / x$。	写成 $3 \times (\sin 3x)/(3x)$；因 $(\sin \theta)/\theta \to 1$ 当 $\theta \to 0$，故极限 $= 3$。	4

丁部：积分与应用（16 分）

不定积分须加常数 C；定积分须先写出原函数再代入上下限。

#	题目	答案	分数
13	求 $\int_0^2 3x^2 \, dx$。	原函数为 x^3，故 $\int_0^2 3x^2 \, dx = [x^3]_0^2 = 8 - 0 = 8$。	4
14	求 $\int (2x + 1)^3 \, dx$。	因 $d/dx \, (2x + 1)^4 = 8(2x + 1)^3$，故 $\int (2x + 1)^3 \, dx = (2x + 1)^4/8 + C$。	4
15	求由 $y = x$ 与 $y = x^2$ 所围成的区域（$0 \le x \le 1$）之面积。	在 $0 < x < 1$ 上 $x > x^2$，面积 $= \int_0^1 (x - x^2) \, dx = [x^2/2 - x^3/3]_0^1 = 1/2 - 1/3 = 1/6 \approx 0.1667$。	4
16	求 $\int_1^e (1/x) \, dx$，并解释结果的意义。	$\int_1^e (1/x) \, dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.0$；即曲线 $y = 1/x$ 在 $x = 1$ 至 $x = e$ 之间与 x 轴所围面积为 1 平方单位。	4

戊部：二项与泊松分布（16 分）

须写出所用分布及其参数；概率取四位小数。

#	题目	答案	分数
17	设 $X \sim B(10, 0.3)$，求 (a) $P(X = 3)$，(b) $E(X)$ 及 $\mathrm{Var}(X)$。	(a) $P(X = 3) = C(10,3)(0.3)^3(0.7)^7 = 0.2668$；(b) $E(X) = np = 3.0$，$\mathrm{Var}(X) = np(1 - p) = 2.0999999999999996$。	4
18	设 $X \sim Po(4)$，求 $P(X = 2)$（四位小数）。	$P(X = 2) = e^{-4} \times 4^2 / 2! = 8e^{-4} = 0.1465$。	4
19	某总机每分钟平均接到 2 个电话，以泊松分布建模。求某分钟完全没有电话的概率。	$X \sim Po(2)$，$P(X = 0) = e^{-2} = 0.1353$。	4
20	某射击手每次命中率为 0.4，独立射击 8 次。求最少命中一次的概率（四位小数）。	$X \sim B(8, 0.4)$，$P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.6^8 = 1 - 0.0168 = 0.9832$。	4

己部：正态分布与点估计（16 分）

可使用标准正态分布表；查表值取四位小数，并须画出或描述阴影区域。

#	题目	答案	分数
21	设 $Z \sim N(0,1)$，求 (a) $P(Z < 1.96)$，(b) $P(-1 < Z < 1)$。	(a) 查表得 $P(Z<1.96)=0.975$；(b) $P(-1<Z<1)=0.8413-0.1587=0.6826000000000001$。	4
22	设 $X \sim N(50, 100)$，求 $P(X > 60)$。	标准化 $z=(60-50)/10=1$，故 $P(X>60)=P(Z>1)=1-0.8413=0.1587$。	4
23	样本 12, 15, 18, 20, 25，求样本平均数及样本标准差（三位有效数字）。	平均数 $=18.0$；离差平方和 $=98.0$；样本方差 $=98.0/4=24.5$；样本标准差 $=\sqrt{24.5}\approx 4.950$。	4
24	从某总体抽取 $n=36$ 的样本，得平均数 52、标准差 6。求总体平均数的 95% 信赖区间。	标准误 $=6/\sqrt{36}=1.0$；95% 信赖区间 $=52\pm 1.96\times 1.0=(50.04)$ 至 (53.96)，即约 $(50.04, 53.96)$。	4