中六數學（延伸部分單元一 M1）練習卷：二項式定理與數列、指數與對數、求導法、積分與應用、二項與泊松分佈、正態分佈與點估計（100 分）

年級：中六 ｜ 科目：數學（M1） ｜ 時限：75 分鐘 ｜ 總分：100 分 ｜ 題數：24 ｜ 答案版

甲部：二項式定理與數列（18 分）

須列出步驟；二項式係數可用 C(n, r) 表示，數列題須寫出公式再代入。

#	題目	答案	分數
1	展開 (1 + 2x)^5，並求 x^3 項與 x^2 項的係數。	由二項式定理，x^3 項係數 = C(5,3)×2^3 = 10×8 = 80；x^2 項係數 = C(5,2)×2^2 = 10×4 = 40。全式為 1 + 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5（代 x = 1 核對總和 = 243 = 3^5 ）。	5
2	在 (2 + x)^6 的展開式中，求常數項及 x^4 項的係數。	通項 = C(6,r)×2^(6–r)×x^r。常數項（r = 0）= 2^6 = 64；x^4 項係數 = C(6,4)×2^2 = 15×4 = 60。	5
3	等差數列首項為 5、公差為 3，求第 10 項及首 10 項之和。	T(10) = a + 9d = 5 + 9×3 = 32；S(10) = (10/2)[2a + 9d] = 5×(10 + 27) = 185。	4
4	等比數列首項為 3、公比為 2，求第 6 項及首 6 項之和。	T(6) = a r^5 = 3×2^5 = 96；S(6) = a(r^6 – 1)/(r – 1) = 3(64 – 1)/1 = 189。	4

乙部：指數與對數（17 分）

解方程時須寫出所用對數律；答案如非整數須取三位有效數字。

#	題目	答案	分數
5	解方程 2^(x + 1) = 32。	32 = 2^5 ，故 x + 1 = 5，x = 4。	4
6	不用計算機，求 (a) $\log_3 81$，(b) $\log_2 (1/8)$。	(a) 81 = 3^4，故 $\log_3 81 = 4$；(b) 1/8 = 2^{-3}，故 $\log_2 (1/8) = -3$。	4
7	解方程 $\log_2 x + \log_2 (x - 2) = 3$，並解釋為何要剔除其中一個根。	合併得 $\log_2[x(x - 2)] = 3$，故 $x(x - 2) = 8$，$x^2 - 2x - 8 = 0$，$(x - 4)(x + 2) = 0$。x = 4 或 x = –2；因 log 的真數須為正，x > 2，故只取 x = 4。	5
8	某人存入 $5000，年利率 5%，按年複利。問最少多少年後本利和不少於 $8000？	解 $5000(1.05)^n \geq 8000$，即 $1.05^n \geq 1.6$，$n \geq \log 1.6 / \log 1.05 \approx 9.633$，故 n = 10 年（金額 ≈ $8,144.47）。	4

丙部：求導法（17 分）

須清楚寫出所用法則（鏈式法則、積法則或隱函數求導）；答案須化簡。

#	題目	答案	分數
9	設 $y = (2x + 3)^5$，求 dy/dx，並求 $x = 1$ 時 dy/dx 的值。	用鏈式法則：$dy/dx = 5(2x + 3)^4 \times 2 = 10(2x + 3)^4$；代入 $x = 1$ 得 $10 \times 5^4 = 6250$。	5
10	設 $y = x^2 \ln x$（$x > 0$），求 dy/dx，並求 $x = e$ 時 dy/dx 的值（取三位有效數字）。	用積法則：$dy/dx = 2x \ln x + x^2 \times (1/x) = 2x \ln x + x$；代入 $x = e$ 得 $2e \ln e + e = 3e \approx 8.15$。	4
11	曲線 $x^2 + y^2 = 25$，求在點 $(3, 4)$ 的切線斜率。	隱函數求導：$2x + 2y(dy/dx) = 0$，故 $dy/dx = -x/y$；在 $(3, 4)$ 斜率 $= -3/4 = -0.75$。	4
12	求 $\lim_{x \to 0} (\sin 3x) / x$。	寫成 $3 \times (\sin 3x)/(3x)$；因 $(\sin \theta)/\theta \to 1$ 當 $\theta \to 0$，故極限 $= 3$。	4

丁部：積分與應用（16 分）

不定積分須加常數 C；定積分須先寫出原函數再代入上下限。

#	題目	答案	分數
13	求 $\int_0^2 3x^2 \, dx$。	原函數為 x^3，故 $\int_0^2 3x^2 \, dx = [x^3]_0^2 = 8 - 0 = 8$。	4
14	求 $\int (2x + 1)^3 \, dx$。	因 $d/dx \, (2x + 1)^4 = 8(2x + 1)^3$，故 $\int (2x + 1)^3 \, dx = (2x + 1)^4/8 + C$。	4
15	求由 $y = x$ 與 $y = x^2$ 所圍成的區域（$0 \le x \le 1$）之面積。	在 $0 < x < 1$ 上 $x > x^2$，面積 $= \int_0^1 (x - x^2) \, dx = [x^2/2 - x^3/3]_0^1 = 1/2 - 1/3 = 1/6 \approx 0.1667$。	4
16	求 $\int_1^e (1/x) \, dx$，並解釋結果的意義。	$\int_1^e (1/x) \, dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.0$；即曲線 $y = 1/x$ 在 $x = 1$ 至 $x = e$ 之間與 x 軸所圍面積為 1 平方單位。	4

戊部：二項與泊松分佈（16 分）

須寫出所用分佈及其參數；概率取四位小數。

#	題目	答案	分數
17	設 $X \sim B(10, 0.3)$，求 (a) $P(X = 3)$，(b) $E(X)$ 及 $\mathrm{Var}(X)$。	(a) $P(X = 3) = C(10,3)(0.3)^3(0.7)^7 = 0.2668$；(b) $E(X) = np = 3.0$，$\mathrm{Var}(X) = np(1 - p) = 2.0999999999999996$。	4
18	設 $X \sim Po(4)$，求 $P(X = 2)$（四位小數）。	$P(X = 2) = e^{-4} \times 4^2 / 2! = 8e^{-4} = 0.1465$。	4
19	某總機每分鐘平均接到 2 個電話，以泊松分佈建模。求某分鐘完全沒有電話的概率。	$X \sim Po(2)$，$P(X = 0) = e^{-2} = 0.1353$。	4
20	某射擊手每次命中率為 0.4，獨立射擊 8 次。求最少命中一次的概率（四位小數）。	$X \sim B(8, 0.4)$，$P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.6^8 = 1 - 0.0168 = 0.9832$。	4

己部：正態分佈與點估計（16 分）

可使用標準正態分佈表；查表值取四位小數，並須畫出或描述陰影區域。

#	題目	答案	分數
21	設 $Z \sim N(0,1)$，求 (a) $P(Z < 1.96)$，(b) $P(-1 < Z < 1)$。	(a) 查表得 $P(Z<1.96)=0.975$；(b) $P(-1<Z<1)=0.8413-0.1587=0.6826000000000001$。	4
22	設 $X \sim N(50, 100)$，求 $P(X > 60)$。	標準化 $z=(60-50)/10=1$，故 $P(X>60)=P(Z>1)=1-0.8413=0.1587$。	4
23	樣本 12, 15, 18, 20, 25，求樣本平均數及樣本標準差（三位有效數字）。	平均數 $=18.0$；離差平方和 $=98.0$；樣本方差 $=98.0/4=24.5$；樣本標準差 $=\sqrt{24.5}\approx 4.950$。	4
24	從某總體抽取 $n=36$ 的樣本，得平均數 52、標準差 6。求總體平均數的 95% 信賴區間。	標準誤 $=6/\sqrt{36}=1.0$；95% 信賴區間 $=52\pm 1.96\times 1.0=(50.04)$ 至 (53.96)，即約 $(50.04, 53.96)$。	4