中六数学延伸单元二

中六　数学延伸单元二　|　时限：75 分钟　|　总分：100 分　|　共 24 题

A 部分：数学归纳法与二项式定理（12 分）

须列出计算步骤，系数答案须化至最简。

1. 求 (1 + 2x)^5 展开式中 x^3 的系数。

答案：一般项为 C(5,r)(2x)^r，取 r = 3：C(5,3)×2^3 = 10×8 = 80。

2. 求 (x - 3/x)^6 展开式中的常数项。

答案：一般项 C(6,r)x^(6-r)(-3/x)^r，常数项取 6-2r = 0，r = 3：C(6,3)×(-3)^3 = 20×(-27) = -540。

3. 用数学归纳法证明：对所有正整数 n，1 + 3 + 5 + … + (2n - 1) = n^2。

答案：当 n = 1，左式 = 1 = 1^2，成立。设 n = k 成立，即前 k 项和 = k^2；则 n = k+1 时和 = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2，故成立；由归纳法得证。验算 n = 4：1+3+5+7 = 16 = 4^2。

4. 求 (2 + x)^7 展开式中 x^2 的系数。

答案：取 r = 2：C(7,2)×2^5 = 21×32 = 672。

B 部分：三角恒等式与三角方程（16 分）

除特别指明外，答案须准确至三位有效数字或保留根式。

5. 已知 A、B 均为锐角，sin A = 3/5，cos B = 5/13。求 sin(A + B) 及 cos(A + B) 的精确值。

答案：cos A = 4/5，sin B = 12/13。sin(A+B) = sinA cosB + cosA sinB = 36/65 + 20/65 = 56/65；cos(A+B) = cosA cosB - sinA sinB = 48/65 - 15/65 = 33/65。

6. 解方程 2sin^2 x - sin x - 1 = 0，其中 0° ⩽ x ⩽ 360°。

答案：因式分解得 (2sin x + 1)(sin x - 1) = 0，故 sin x = 1 或 sin x = -1/2。由 sin x = 1 得 x = 90°；由 sin x = -1/2 得 x = 210° 或 330°。答案：90°、210°、330°。

7. 求 3sin x + 4cos x 的最大值，并求此时 tan x 的值。

答案：写成 R sin(x + α)，R = √(3^2 + 4^2) = 5，故最大值为 5；此时 sin(x+α) = 1，即 x = 90° - α，其中 tan α = 4/3，故 tan x = 1/tan α = 3/4 = 0.75。

8. 已知 cos A = 0.6，求 cos 2A 的值。

答案：cos 2A = 2cos^2 A - 1 = 2(0.6)^2 - 1 = 0.72 - 1 = -0.28。

C 部分：极限与微分及其应用（20 分）

须列出求导或求极限的步骤。

9. 求 lim(x→0) sin 3x / (5x)。

答案：sin 3x / (5x) = (3/5) · (sin 3x / (3x))，当 x→0 时 sin3x/(3x)→1，故极限 = 3/5 = 0.60。

10. 设 y = x^2 e^(3x)，求 dy/dx，并求 x = 1 时 dy/dx 的值（准确至三位有效数字）。

答案：由积法则 dy/dx = 2x e^(3x) + 3x^2 e^(3x) = x e^(3x)(2 + 3x)。x = 1 时 dy/dx = 5e^3 ≈ 100.4。

11. 求曲线 y = x^3 - 3x^2 + 2 的极大点与极小点。

答案：dy/dx = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)，驻点 x = 0 及 x = 2。x = 0 时 y = 2 且二阶导数 -6 < 0，为极大点 (0, 2)；x = 2 时 y = 8 - 12 + 2 = -2 且二阶导数 6 > 0，为极小点 (2, -2)。

12. 求曲线 y = x ln x 在 x = e 处的切线方程。

答案：y(e) = e ln e = e，切点 (e, e)。dy/dx = ln x + 1，在 x = e 时斜率 = 1 + 1 = 2，故切线为 y - e = 2(x - e)，即 y = 2x - e。

D 部分：积分与面积、体积（20 分）

定积分须写出原函数（不定积分）的步骤。

13. 求 ∫(由 0 到 1)(3x^2 + 2x) dx。

答案：原函数为 x^3 + x^2，代入上下限：1 + 1 = 2。

14. 求 ∫(由 0 到 1) x e^x dx。

答案：用分部积分，∫ x e^x dx = e^x(x - 1) + C；代入下限 0 得 -1，上限 1 得 0，故定积分 = 0 - (-1) = 1。

15. 求由曲线 y = x^2 与 y = 2x - x^2 所围区域的面积。

答案：两曲线交于 x^2 = 2x - x^2，即 2x^2 - 2x = 0，x = 0 或 1。面积 = ∫(0 到 1)(2x - 2x^2) dx = [x^2 - (2/3)x^3] = 1 - 2/3 = 1/3 ≈ 0.3333。

16. 曲线 y = x^2 由 x = 0 至 x = 1 绕 x 轴旋转一周，求所生成旋转体的体积。

答案：V = π ∫(0 到 1)(x^2)^2 dx = π[x^5/5](0 到 1) = π/5 ≈ 0.6283。

E 部分：向量（16 分）

设 a = (2, -1, 3)，b = (1, 4, -2)。

17. 求 a · b。

答案：a · b = (2)(1) + (-1)(4) + (3)(-2) = 2 - 4 - 6 = -8。

18. 求 a 与 b 之间的夹角（准确至三位有效数字）。

答案：|a| = √14，|b| = √21，cos θ = -8/√(294) ≈ -0.4665，故 θ ≈ 117.8°。

19. 求 a × b 及其模（模准确至三位有效数字）。

答案：a × b = ((-1)(-2) - (3)(4), (3)(1) - (2)(-2), (2)(4) - (-1)(1)) = (-10, 7, 9)；模 = √(100 + 49 + 81) = √230 ≈ 15.17。

20. 求 a + 2b，并求该向量与 b 的纯量积。

答案：a + 2b = (2 + 2, -1 + 8, 3 - 4) = (4, 7, -1)；(4)(1) + (7)(4) + (-1)(-2) = 4 + 28 + 2 = 34，亦等于 a · b + 2|b|^2 = -8 + 42 = 34。

F 部分：矩阵与线性变换（16 分）

设 A = [[2, 1], [3, 4]]，B = [[1, 2], [0, 3]]。

21. 求 det A 及 A 的逆矩阵。

答案：det A = (2)(4) - (1)(3) = 5；A^-1 = (1/5)[[4, -1], [-3, 2]]。

22. 求 AB，并由此求 det(AB)。

答案：AB = [[2(1)+1(0), 2(2)+1(3)], [3(1)+4(0), 3(2)+4(3)]] = [[2, 7], [3, 18]]；det(AB) = 36 - 21 = 15 = det A × det B = 5 × 3。

23. 用逆矩阵解方程组 2x + y = 8，3x + 4y = 27。

答案：x = (4×8 - 1×27)/5 = 5/5 = 1，y = (-3×8 + 2×27)/5 = 30/5 = 6。验算：2(1) + 6 = 8，3(1) + 4(6) = 27。

24. 线性变换 T 由矩阵 M = [[0, -1], [1, 0]] 表示。描述 T 的几何效果，并求面积的放大率。

答案：M 把 (x, y) 映射至 (-y, x)，即绕原点逆时针旋转 90°；面积放大率 = |det M| = |(0)(0) - (-1)(1)| = 1，即面积不变。

TutorZone 中六数学延伸单元二练习卷｜题目与文章为原创，并非任何学校或出版社的教材。