中六數學延伸單元二

中六　數學延伸單元二　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

A 部分：數學歸納法與二項式定理（12 分）

須列出計算步驟，係數答案須化至最簡。

1. 求 (1 + 2x)^5 展開式中 x^3 的係數。
答案：一般項為 C(5,r)(2x)^r，取 r = 3：C(5,3)×2^3 = 10×8 = 80。

2. 求 (x - 3/x)^6 展開式中的常數項。
答案：一般項 C(6,r)x^(6-r)(-3/x)^r，常數項取 6-2r = 0，r = 3：C(6,3)×(-3)^3 = 20×(-27) = -540。

3. 用數學歸納法證明：對所有正整數 n，1 + 3 + 5 + ⋯ + (2n - 1) = n^2。
答案：當 n = 1，左式 = 1 = 1^2，成立。設 n = k 成立，即前 k 項和 = k^2；則 n = k+1 時和 = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2，故成立；由歸納法得證。驗算 n = 4：1+3+5+7 = 16 = 4^2。

4. 求 (2 + x)^7 展開式中 x^2 的係數。
答案：取 r = 2：C(7,2)×2^5 = 21×32 = 672。

B 部分：三角恆等式與三角方程（16 分）

除特別指明外，答案須準確至三位有效數字或保留根式。

5. 已知 A、B 均為銳角，sin A = 3/5，cos B = 5/13。求 sin(A + B) 及 cos(A + B) 的精確值。
答案：cos A = 4/5，sin B = 12/13。sin(A+B) = sinA cosB + cosA sinB = 36/65 + 20/65 = 56/65；cos(A+B) = cosA cosB - sinA sinB = 48/65 - 15/65 = 33/65。

6. 解方程 2sin^2 x - sin x - 1 = 0，其中 0° ⩽ x ⩽ 360°。
答案：因式分解得 (2sin x + 1)(sin x - 1) = 0，故 sin x = 1 或 sin x = -1/2。由 sin x = 1 得 x = 90°；由 sin x = -1/2 得 x = 210° 或 330°。答案：90°、210°、330°。

7. 求 3sin x + 4cos x 的最大值，並求此時 tan x 的值。
答案：寫成 R sin(x + α)，R = √(3^2 + 4^2) = 5，故最大值為 5；此時 sin(x+α) = 1，即 x = 90° - α，其中 tan α = 4/3，故 tan x = 1/tan α = 3/4 = 0.75。

8. 已知 cos A = 0.6，求 cos 2A 的值。
答案：cos 2A = 2cos^2 A - 1 = 2(0.6)^2 - 1 = 0.72 - 1 = -0.28。

C 部分：極限與微分及其應用（20 分）

須列出求導或求極限的步驟。

9. 求 lim(x→0) sin 3x / (5x)。
答案：sin 3x / (5x) = (3/5) · (sin 3x / (3x))，當 x→0 時 sin3x/(3x)→1，故極限 = 3/5 = 0.60。

10. 設 y = x^2 e^(3x)，求 dy/dx，並求 x = 1 時 dy/dx 的值（準確至三位有效數字）。

答案：由積法則 dy/dx = 2x e^(3x) + 3x^2 e^(3x) = x e^(3x)(2 + 3x)。x = 1 時 dy/dx = 5e^3 ≈ 100.4。

11. 求曲線 y = x^3 - 3x^2 + 2 的極大點與極小點。

答案：dy/dx = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)，駐點 x = 0 及 x = 2。x = 0 時 y = 2 且二階導數 -6 < 0，為極大點 (0, 2)；x = 2 時 y = 8 - 12 + 2 = -2 且二階導數 6 > 0，為極小點 (2, -2)。

12. 求曲線 y = x ln x 在 x = e 處的切線方程。

答案：y(e) = e ln e = e，切點 (e, e)。dy/dx = ln x + 1，在 x = e 時斜率 = 1 + 1 = 2，故切線為 y - e = 2(x - e)，即 y = 2x - e。

D 部分：積分與面積、體積（20 分）

定積分須寫出原函數（不定積分）的步驟。

13. 求 ∫(由 0 到 1)(3x^2 + 2x) dx。

答案：原函數為 x^3 + x^2，代入上下限：1 + 1 = 2。

14. 求 ∫(由 0 到 1) x e^x dx。

答案：用分部積分，∫ x e^x dx = e^x(x - 1) + C；代入下限 0 得 -1，上限 1 得 0，故定積分 = 0 - (-1) = 1。

15. 求由曲線 y = x^2 與 y = 2x - x^2 所圍區域的面積。

答案：兩曲線交於 x^2 = 2x - x^2，即 2x^2 - 2x = 0，x = 0 或 1。面積 = ∫(0 到 1)(2x - 2x^2) dx = [x^2 - (2/3)x^3] = 1 - 2/3 = 1/3 ≈ 0.3333。

16. 曲線 y = x^2 由 x = 0 至 x = 1 繞 x 軸旋轉一周，求所生成旋轉體的體積。

答案：V = π ∫(0 到 1)(x^2)^2 dx = π[x^5/5](0 到 1) = π/5 ≈ 0.6283。

E 部分：向量（16 分）

設 a = (2, -1, 3)，b = (1, 4, -2)。

17. 求 a · b。

答案：a · b = (2)(1) + (-1)(4) + (3)(-2) = 2 - 4 - 6 = -8。

18. 求 a 與 b 之間的夾角（準確至三位有效數字）。

答案：|a| = √14，|b| = √21，cos θ = -8/√(294) ≈ -0.4665，故 θ ≈ 117.8°。

19. 求 a × b 及其模（模準確至三位有效數字）。

答案：a × b = ((-1)(-2) - (3)(4), (3)(1) - (2)(-2), (2)(4) - (-1)(1)) = (-10, 7, 9)；模 = √(100 + 49 + 81) = √230 ≈ 15.17。

20. 求 a + 2b，並求該向量與 b 的純量積。

答案：a + 2b = (2 + 2, -1 + 8, 3 - 4) = (4, 7, -1)；(4)(1) + (7)(4) + (-1)(-2) = 4 + 28 + 2 = 34，亦等於 a · b + 2|b|^2 = -8 + 42 = 34。

F 部分：矩陣與線性變換（16 分）

設 A = [[2, 1], [3, 4]]，B = [[1, 2], [0, 3]]。

21. 求 det A 及 A 的逆矩陣。

答案：det A = (2)(4) - (1)(3) = 5；A^-1 = (1/5)[[4, -1], [-3, 2]]。

22. 求 AB，並由此求 det(AB)。

答案：AB = [[2(1)+1(0), 2(2)+1(3)], [3(1)+4(0), 3(2)+4(3)]] = [[2, 7], [3, 18]]；det(AB) = 36 - 21 = 15 = det A × det B = 5 × 3。

23. 用逆矩陣解方程組 2x + y = 8，3x + 4y = 27。

答案：x = (4×8 - 1×27)/5 = 5/5 = 1，y = (-3×8 + 2×27)/5 = 30/5 = 6。驗算：2(1) + 6 = 8，3(1) + 4(6) = 27。

24. 線性變換 T 由矩陣 M = [[0, -1], [1, 0]] 表示。描述 T 的幾何效果，並求面積的放大率。

答案：M 把 (x, y) 映射至 (-y, x)，即繞原點逆時針旋轉 90°；面積放大率 = |det M| = |(0)(0) - (-1)(1)| = 1，即面積不變。

TutorZone 中六數學延伸單元二練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。