中六数学（必修）练习卷：余式与因式定理、分式方程与绝对值不等式、线性规划、圆方程与切线、轨迹、等差等比与对数增长、排列组合与条件概率、二项分布、正态分布与回归（100 分）

年级：中六 ｜ 科目：数学（必修） ｜ 时限：75 分钟 ｜ 总分：100 分 ｜ 题数：24 ｜ 答案版

甲部　余式与因式定理

回答下列各题，须列出计算步骤；未列步骤者不给步骤分。

#	题目	答案	分数
1	设 $P(x)=2x^3-3x^2+ax+5$，且 $P(2)=7$。（a）求 a 的值。（b）由此求 $P(-1)$。	（a）$P(2)=16-12+2a+5=7$，即 $2a+9=7$，$a=-1$。（b）$P(-1)=-2-3+1+5=1$。	4
2	已知 $P(x)=x^3-4x^2+x+6$。（a）证明 $x-3$ 是 $P(x)$ 的因式。（b）由此把 $P(x)$ 完全分解。	（a）$P(3)=27-36+3+6=0$，故 $x-3$ 为因式。（b）由长除法得 $P(x)=(x-3)(x^2-x-2)$，再分解 $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$，故 $P(x)=(x-3)(x-2)(x+1)$。	4
3	把 $2x^3+x^2-5x+2$ 除以 $x+2$，写出商式及余数。	由余式定理，余数 $=2(-8)+4+10+2=0$。由长除法，商式 $=2x^2-3x+1$，余数 $=0$。验算：$(x+2)(2x^2-3x+1)=2x^3+x^2-5x+2$。	4
4	设 k 为常数，且 $x+1$ 是 $2x^3+kx^2-3x+2$ 的因式。求 k，并由此解方程 $2x^3+kx^2-3x+2=0$。	（a）由因式定理，$2(-1)+k+3+2=0$，即 $k+3=0$，$k=-3$。（b）原式 $=2x^3-3x^2-3x+2$除以 $x+1$ 得商 $2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)$，故 $x=-1$、$x=1/2$ 或 $x=2$。	4

乙部　方程、不等式与线性规划

回答下列各题，须列出计算步骤；未列步骤者不给步骤分。

#	题目	答案	分数
5	在约束 $x+2y\le 8$、$2x+y\le 10$、$x\ge 0$、$y\ge 0$ 下，求 $P=3x+2y$ 的最大值及对应的 (x,y)。	可行域的顶点为 $(0,0)$、$(5,0)$、$(4,2)$、$(0,4)$。代入 P：0、15、16、8。故最大值为 16，在 $(x,y)=(4,2)$ 时取得。	4
6	解方程 $4/(x+1)=x-2$。	两边乘 $(x+1)$（$x\neq -1$）：$4=(x-2)(x+1)=x^2-x-2$，即 $x^2-x-6=0$，$(x-3)(x+2)=0$，故 $x=3$ 或 $x=-2$。两根均不等于 -1，故均为解。	4
7	解不等式 $\lvert 2x-5\rvert<7$，并写出所有整数解。	由 $-7<2x-5<7$ 得 $-2<2x<12$，即 $-1<x<6$。整数解为 0、1、2、3、4、5，共 6 个。	4
8	解联立方程 $y=x+1$ 及 $x^2+y^2=25$。	代入得 $x^2+(x+1)^2=25$，即 $2x^2+2x-24=0$，$x^2+x-12=0$，$(x-3)(x+4)=0$。故 $(x,y)=(3,4)$ 或 $(-4,-3)$。	4

丙部　圆方程、切线与轨迹

回答下列各题，须列出计算步骤；未列步骤者不给步骤分。

#	题目	答案	分数
9	求圆 $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ 的圆心及半径。	配方得 $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9 + 16 + 11 = 36$。故圆心为 $(3, -4)$，半径为 6。	4
10	求圆 $x^2 + y^2 = 25$ 在点 $(3, 4)$ 的切线方程。	半径斜率 $= 4/3$，故切线斜率 $= -3/4$。切线：$y - 4 = (-3/4)(x - 3)$，即 $3x + 4y = 25$。验算：$3(3) + 4(4) = 25$。	4
11	直线 $y = x + 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 25$ 相交于 A、B 两点。（a）求 A、B 坐标。（b）求 AB 的长度。	（a）代入得 $x^2 + (x+1)^2 = 25$，即 $x^2 + x - 12 = 0$，$x = 3$ 或 $x = -4$，故 $A(3, 4)$、$B(-4, -3)$。（b）$AB = \sqrt{(7^2 + 7^2)} = 7\sqrt{2} \approx 9.90$。	4
12	求与 $A(0, 0)$ 及 $B(6, 0)$ 两点等距的点的轨迹方程，并描述该轨迹。	设动点为 $P(x, y)$。$PA^2 = PB^2$，即 $x^2 + y^2 = (x-6)^2 + y^2$，展开得 $x^2 = x^2 - 12x + 36$，故 $x = 3$。轨迹是 AB 的垂直平分线，即直线 $x = 3$。	4

丁部　数列、对数与增长

回答下列各题，须列出计算步骤；未列步骤者不给步骤分。

#	题目	答案	分数
13	等比数列首项为 3，公比为 2。（a）求第 8 项。（b）求首 8 项之和。	（a）$T(8) = 3 \times 2^{(8-1)} = 3 \times 128 = 384$。（b）$S(8) = 3(2^8 - 1)/(2 - 1) = 3 \times 255 = 765$。	4
14	等差数列首项为 5，公差为 7。（a）求第 20 项。（b）求首 20 项之和。	（a）$T(20) = 5 + (20 - 1) \times 7 = 5 + 133 = 138$。（b）$S(20) = 20(5 + 138)/2 = 1430$。	4
15	（a）求 $\log_2 32$。（b）求 $\log_3 (1/27)$。（c）解方程 $3^{(2x-1)} = 81$。	（a）$2^5 = 32$，故 $\log_2 32 = 5$。（b）$3^{-3} = 1/27$，故 $\log_3 (1/27) = -3$。（c）$81 = 3^4$，故 $2x - 1 = 4$，$x = 2.5$。	4
16	某城市人口为 500,000 人，每年增长 2.5%。（a）求 5 年后的人口（取整数）。（b）求人口倍增所需年数（取 2 位小数）。	（a）人口 $= 500{,}000 \times 1.025^5 \approx 565{,}704$ 人。（b）$1.025^n = 2$，$n = \ln 2 / \ln 1.025 \approx 28.07$ 年。	4

戊部　排列组合与概率

回答下列各题，须列出计算步骤；未列步骤者不给步骤分。

#	题目	答案	分数
17	从 8 人中选 3 人组成委员会。（a）共有多少种选法？（b）若其中 1 人必须在委员会内，有多少种选法？（c）5 人排成一列，其中 2 名指定人必须相邻，有多少种排法？	（a）$C(8, 3) = 56$。（b）$C(7, 2) = 21$。（c）把 2 人视为一体：$4! \times 2 = 48$。	5
18	袋中有 5 个红球和 3 个蓝球。随机抽出 2 个球（不放回）。（a）求两个都是红球的概率。（b）求至少有 1 个蓝球的概率。	（a）$P = C(5, 2)/C(8, 2) = 10/28 = 5/14 \approx 0.357$。（b）$P = 1 - 5/14 = 9/14 \approx 0.643$。	5

19	已知 $P(A)=0.5$、$P(B)=0.4$、$P(A\cap B)=0.2$。（a）求 $P(A\mid B)$。（b）判断 A 与 B 是否独立，并说明理由。	（a）$P(A\mid B)=P(A\cap B)/P(B)=0.2/0.4=0.5$。（b）$P(A)\times P(B)=0.5\times0.4=0.2=P(A\cap B)$，故 A 与 B 独立。	4
20	设 $X\sim B(10,0.3)$。（a）求 $P(X=3)$（取 4 位小数）。（b）求 $E(X)$ 及标准差（取 4 位小数）。	（a）$P(X=3)=C(10,3)(0.3)^3(0.7)^7=120\times0.027\times0.0823543\approx0.2668$。（b）$E(X)=np=3.0$，标准差 $=\sqrt{np(1-p)}=1.4491$。	4

己部　正态分布与统计

回答下列各题，须列出计算步骤；未列步骤者不给步骤分。

#	题目	答案	分数
21	某考试成绩呈正态分布，平均值 60 分，标准差 8 分。（a）求 72 分及 52 分的标准分。（b）已知 $P(Z<1.5)=0.9332$，求成绩高于 72 分的百分比。	（a）$z(72)=(72-60)/8=1.5$；$z(52)=(52-60)/8=-1.0$。（b）$P(X>72)=1-0.9332=0.0668$，即 6.68%。	5
22	数据：4, 6, 6, 8, 11。求（a）平均值、（b）方差、（c）标准差（取 5 位小数）。	（a）平均 $=35/5=7$。（b）方差 $=28/5=5.6$。（c）标准差 $=\sqrt{5.6}\approx2.36643$。	5
23	数据：12, 15, 15, 18, 20, 22。求（a）平均值、（b）中位数、（c）众数、（d）全距。	（a）平均 $=102/6=17$。（b）中位数 $=(15+18)/2=16.5$。（c）众数 $=15$。（d）全距 $=22-12=10$。	4
24	一组 5 对数据得 $\Sigma x=30$、$\Sigma y=50$、$\Sigma xy=340$、$\Sigma x^2=220$、$\Sigma y^2=560$。（a）求 y 对 x 的回归直线方程。（b）由此估计 $x=10$ 时 y 的值。	（a）斜率 $b=(5\times340-30\times50)/(5\times220-30^2)=200/200=1.0$；截距 $a=(50-1.0\times30)/5=4.0$，故 $y=x+4$。（b）$x=10$ 时 $y\approx14$。	4