中六數學（必修）練習卷：餘式與因式定理、分式方程與絕對值不等式、線性規劃、圓方程與切線、軌跡、等差等比與對數增長、排列組合與條件概率、二項分佈、正態分佈與回歸（100 分）

年級：中六　｜　科目：數學（必修）　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　題數：24　｜　答案版

甲部　餘式與因式定理

回答下列各題，須列出計算步驟；未列步驟者不給步驟分。

#	題目	答案	分數
1	設 $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + 5$，且 $P(2) = 7$。（a）求 a 的值。（b）由此求 $P(-1)$。	（a）$P(2) = 16 - 12 + 2a + 5 = 7$，即 $2a + 9 = 7$，$a = -1$。（b）$P(-1) = -2 - 3 + 1 + 5 = 1$。	4
2	已知 $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$。（a）證明 $x - 3$ 是 $P(x)$ 的因式。（b）由此把 $P(x)$ 完全分解。	（a）$P(3) = 27 - 36 + 3 + 6 = 0$，故 $x - 3$ 為因式。（b）由長除法得 $P(x) = (x - 3)(x^2 - x - 2)$，再分解 $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$，故 $P(x) = (x - 3)(x - 2)(x + 1)$。	4
3	把 $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ 除以 $x + 2$，寫出商式及餘數。	由餘式定理，餘數 $= 2(-8) + 4 + 10 + 2 = 0$。由長除法，商式 $= 2x^2 - 3x + 1$，餘數 $= 0$。驗算：$(x + 2)(2x^2 - 3x + 1) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$。	4
4	設 k 為常數，且 $x + 1$ 是 $2x^3 + kx^2 - 3x + 2$ 的因式。求 k，並由此解方程 $2x^3 + kx^2 - 3x + 2 = 0$。	（a）由因式定理，$2(-1) + k + 3 + 2 = 0$，即 $k + 3 = 0$，$k = -3$。（b）原式 $= 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$除以 $x + 1$ 得商 $2x^2 - 5x + 2 = (2x - 1)(x - 2)$，故 $x = -1$、$x = 1/2$ 或 $x = 2$。	4

乙部　方程、不等式與線性規劃

回答下列各題，須列出計算步驟；未列步驟者不給步驟分。

#	題目	答案	分數
5	在約束 $x + 2y \le 8$、$2x + y \le 10$、$x \ge 0$、$y \ge 0$ 下，求 $P = 3x + 2y$ 的最大值及對應的 (x, y)。	可行域的頂點為 $(0,0)$、$(5,0)$、$(4,2)$、$(0,4)$。代入 P：0、15、16、8。故最大值為 16，在 $(x, y) = (4, 2)$ 時取得。	4
6	解方程 $4 / (x + 1) = x - 2$。	兩邊乘 $(x + 1)$（$x \neq -1$）：$4 = (x - 2)(x + 1) = x^2 - x - 2$，即 $x^2 - x - 6 = 0$，$(x - 3)(x + 2) = 0$，故 $x = 3$ 或 $x = -2$。兩根均不等於 -1，故均為解。	4
7	解不等式 $\lvert 2x - 5 \rvert < 7$，並寫出所有整數解。	由 $-7 < 2x - 5 < 7$ 得 $-2 < 2x < 12$，即 $-1 < x < 6$。整數解為 0、1、2、3、4、5，共 6 個。	4
8	解聯立方程 $y = x + 1$ 及 $x^2 + y^2 = 25$。	代入得 $x^2 + (x + 1)^2 = 25$，即 $2x^2 + 2x - 24 = 0$，$x^2 + x - 12 = 0$，$(x - 3)(x + 4) = 0$。故 $(x, y) = (3, 4)$ 或 $(-4, -3)$。	4

丙部　圓方程、切線與軌跡

回答下列各題，須列出計算步驟；未列步驟者不給步驟分。

#	題目	答案	分數
9	求圓 $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ 的圓心及半徑。	配方得 $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9 + 16 + 11 = 36$。故圓心為 $(3, -4)$，半徑為 6。	4
10	求圓 $x^2 + y^2 = 25$ 在點 $(3, 4)$ 的切線方程。	半徑斜率 $= 4/3$，故切線斜率 $= -3/4$。切線：$y - 4 = (-3/4)(x - 3)$，即 $3x + 4y = 25$。驗算：$3(3) + 4(4) = 25$。	4
11	直線 $y = x + 1$ 與圓 $x^2 + y^2 = 25$ 相交於 A、B 兩點。（a）求 A、B 坐標。（b）求 AB 的長度。	（a）代入得 $x^2 + (x+1)^2 = 25$，即 $x^2 + x - 12 = 0$，$x = 3$ 或 $x = -4$，故 $A(3, 4)$、$B(-4, -3)$。（b）$AB = \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2} \approx 9.90$。	4
12	求與 $A(0, 0)$ 及 $B(6, 0)$ 兩點等距的點的軌跡方程，並描述該軌跡。	設動點為 $P(x, y)$。$PA^2 = PB^2$，即 $x^2 + y^2 = (x-6)^2 + y^2$，展開得 $x^2 = x^2 - 12x + 36$，故 $x = 3$。軌跡是 AB 的垂直平分線，即直線 $x = 3$。	4

丁部　數列、對數與增長

回答下列各題，須列出計算步驟；未列步驟者不給步驟分。

#	題目	答案	分數
13	等比數列首項為 3，公比為 2。（a）求第 8 項。（b）求首 8 項之和。	（a）$T(8) = 3 \times 2^{(8-1)} = 3 \times 128 = 384$。（b）$S(8) = 3(2^8 - 1)/(2 - 1) = 3 \times 255 = 765$。	4
14	等差數列首項為 5，公差為 7。（a）求第 20 項。（b）求首 20 項之和。	（a）$T(20) = 5 + (20 - 1) \times 7 = 5 + 133 = 138$。（b）$S(20) = 20(5 + 138)/2 = 1430$。	4
15	（a）求 $\log_2 32$。（b）求 $\log_3 (1/27)$。（c）解方程 $3^{(2x-1)} = 81$。	（a）$2^5 = 32$，故 $\log_2 32 = 5$。（b）$3^{-3} = 1/27$，故 $\log_3 (1/27) = -3$。（c）$81 = 3^4$，故 $2x - 1 = 4$，$x = 2.5$。	4
16	某城市人口為 $500{,}000$ 人，每年增長 2.5%。（a）求 5 年後的人口（取整數）。（b）求人口倍增所需年數（取 2 位小數）。	（a）人口 $= 500{,}000 \times 1.025^5 \approx 565{,}704$ 人。（b）$1.025^n = 2$，$n = \ln 2 / \ln 1.025 \approx 28.07$ 年。	4

戊部　排列組合與概率

回答下列各題，須列出計算步驟；未列步驟者不給步驟分。

#	題目	答案	分數
17	從 8 人中選 3 人組成委員會。（a）共有多少種選法？（b）若其中 1 人必須在委員會內，有多少種選法？（c）5 人排成一列，其中 2 名指定人必須相鄰，有多少種排法？	（a）$C(8, 3) = 56$。（b）$C(7, 2) = 21$。（c）把 2 人視為一體：$4! \times 2 = 48$。	5
18	袋中有 5 個紅球和 3 個藍球。隨機抽出 2 個球（不放回）。（a）求兩個都是紅球的概率。（b）求至少有 1 個藍球的概率。	（a）$P = C(5, 2)/C(8, 2) = 10/28 = 5/14 \approx 0.357$。（b）$P = 1 - 5/14 = 9/14 \approx 0.643$。	5

19	已知 $P(A)=0.5$、$P(B)=0.4$、$P(A\cap B)=0.2$。（a）求 $P(A\mid B)$。（b）判斷 A 與 B 是否獨立，並說明理由。	（a）$P(A\mid B)=P(A\cap B)/P(B)=0.2/0.4=0.5$。（b）$P(A)\times P(B)=0.5\times0.4=0.2=P(A\cap B)$，故 A 與 B 獨立。	4
20	設 $X\sim B(10,0.3)$。（a）求 $P(X=3)$（取 4 位小數）。（b）求 $E(X)$ 及標準差（取 4 位小數）。	（a）$P(X=3)=C(10,3)(0.3)^3(0.7)^7=120\times0.027\times0.0823543\approx0.2668$。（b）$E(X)=np=3.0$，標準差 $=\sqrt{np(1-p)}=1.4491$。	4

己部　正態分佈與統計

回答下列各題，須列出計算步驟；未列步驟者不給步驟分。

#	題目	答案	分數
21	某考試成績呈正態分佈，平均值 60 分，標準差 8 分。（a）求 72 分及 52 分的標準分。（b）已知 $P(Z<1.5)=0.9332$，求成績高於 72 分的百分比。	（a）$z(72)=(72-60)/8=1.5$；$z(52)=(52-60)/8=-1.0$。（b）$P(X>72)=1-0.9332=0.0668$，即 6.68%。	5
22	數據：4, 6, 6, 8, 11。求（a）平均值、（b）方差、（c）標準差（取 5 位小數）。	（a）平均 $=35/5=7$。（b）方差 $=28/5=5.6$。（c）標準差 $=\sqrt{5.6}\approx2.36643$。	5
23	數據：12, 15, 15, 18, 20, 22。求（a）平均值、（b）中位數、（c）眾數、（d）全距。	（a）平均 $=102/6=17$。（b）中位數 $=(15+18)/2=16.5$。（c）眾數 $=15$。（d）全距 $=22-12=10$。	4
24	一組 5 對數據得 $\Sigma x=30$、$\Sigma y=50$、$\Sigma xy=340$、$\Sigma x^2=220$、$\Sigma y^2=560$。（a）求 y 對 x 的回歸直線方程。（b）由此估計 $x=10$ 時 y 的值。	（a）斜率 $b=(5\times340-30\times50)/(5\times220-30^2)=200/200=1.0$；截距 $a=(50-1.0\times30)/5=4.0$，故 $y=x+4$。（b）$x=10$ 時 $y\approx14$。	4