中五数学延伸单元一（M1）练习卷：二项式定理与数列、指数与对数、极限与求导、微分应用、积分与面积、梯形法则、二项与正态分布（100 分）

年级：中五　|　科目：数学延伸单元一（M1）　|　时限：75 分钟　|　总分：100 分　|　题数：24　|　答案版

甲部　二项式定理与数列（18 分）

回答下列各题，须列出计算步骤。

#	题目	答案	分数
1	展开 $(1 + 2x)^5$，求 (a) 展开式中 x^3 的系数；(b) 展开式各项系数之和；(c) 常数项。	(a) $C(5,3) \times 2^3 = 10 \times 8 = 80$；(b) 令 $x = 1$，系数和 $= (1 + 2)^5 = 243$；(c) 常数项 $= 1$	5
2	在 $(2 + x/2)^8$ 的展开式中，求 (a) x^5 的系数；(b) 展开式共有多少项。	(a) 一般项 $C(8,r)\,2^{(8-r)}\,(x/2)^r$，取 $r = 5$：$C(8,5) \times 2^3 \times (1/2)^5 = 56 \times 8/32 = 14$；(b) 共 $8 + 1 = 9$ 项	5
3	某等差数列首项为 7，公差为 5。求 (a) 使第 n 项等于 122 的 n；(b) 该数列首 24 项之和。	(a) $7 + 5(n - 1) = 122$，解得 $n = 24$；(b) $S_{24} = 24/2 \times (7 + 122) = 12 \times 129 = 1548$	4
4	某等比数列首项为 5，公比为 1/3。求 (a) 无限项之和；(b) 第 6 项（准至 4 位小数）。	(a) $S_\infty = 5 \div (1 - 1/3) = 7.5$；(b) 第 6 项 $= 5 \times (1/3)^5 = 5/243 \approx 0.0206$	4

乙部　指数、对数与指数增长（16 分）

回答下列各题，须列出计算步骤。

#	题目	答案	分数
5	解方程 $3^{(2x - 1)} = 27^{(x + 1)}$。	$27^{(x+1)} = 3^{(3x+3)}$，故 $2x - 1 = 3x + 3$，解得 $x = -4$	4
6	求 (a) $\log_2 48 - \log_2 3$ 的值；(b) 若 $\log_a 9 = 2$，求 a。	(a) $\log_2 (48 \div 3) = \log_2 16 = 4$；(b) $a^2 = 9$，且 $a > 0$，故 $a = 3$	4
7	某培养皿内细菌每 4 小时增加一倍，开始时有 500 个。求 (a) 24 小时后的数目；(b) 数目首次达到 16 000 所需的时间。	(a) $24 \div 4 = 6$，$500 \times 2^6 = 32\,000$；(b) $500 \times 2^k = 16\,000$，$2^k = 32$，$k = 5$，即 20 小时	4
8	某放射性物质半衰期为 12 年，现有样本 80 g。求 (a) 36 年后的质量；(b) 质量 m 与时间 t（年）的关系。	(a) $36 \div 12 = 3$，$80 \times (1/2)^3 = 10$ g；(b) $m = 80 \times 2^{(-t/12)}$（g）	4

丙部　极限与求导法（18 分）

回答下列各题，须列出计算步骤。

#	题目	答案	分数

9	已知 $y = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$。求 (a) dy/dx；(b) 曲线在 $x = 2$ 处的切线斜率。	(a) $dy/dx = 12x^3 - 6x^2 + 5$；(b) $x = 2$ 时斜率 $= 96 - 24 + 5 = 77$	5
10	已知 $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 2)$。求 (a) $f'(x)$；(b) $f'(1)$。	(a) 用积法则：$f'(x) = 2x(3x - 2) + 3(x^2 + 1) = 9x^2 - 4x + 3$；(b) $f'(1) = 8$	5
11	求下列极限：(a) $\lim_{x\to 3} (x^2 - 9)/(x - 3)$；(b) $\lim_{x\to 0} \sin 5x / x$。	(a) 分子分解为 $(x - 3)(x + 3)$，约去 $x - 3$ 后得 $x + 3 \to 6$；(b) 极限 $= 5$	4
12	求下列极限：(a) $\lim_{x\to\infty} (4x^2 + 3x - 1)/(2x^2 - x + 5)$；(b) $\lim_{x\to 2} (x^3 - 8)/(x - 2)$。	(a) 分子分母同除以 x^2，极限 $= 4/2 = 2$；(b) 由导数 $3x^2$ 在 $x = 2$ 的值得 12	4

丁部　微分应用（16 分）

回答下列各题，须列出计算步骤。

#	题目	答案	分数
13	已知曲线 $y = x^3 - 2x$。求 (a) 曲线在 $x = 1$ 处的切线方程；(b) 该切线的 y 轴截距。	(a) $y' = 3x^2 - 2$，$x = 1$ 时斜率 $= 1$，点为 $(1, -1)$，切线 $y = x - 2$；(b) y 轴截距 $= -2$	4
14	已知 $y = x^3 - 3x^2 + 4$。求 (a) 所有驻点的 x 值；(b) 各驻点的性质与对应的 y 值。	(a) $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$，故 $x = 0$ 或 $x = 2$；(b) $x = 0$ 为极大点，$y = 4$；$x = 2$ 为极小点，$y = 0$	4
15	一个圆球的半径以 0.5 cm/s 增加。当半径为 6 cm 时，求体积的增加率（取 $\pi = 3.14$，准至 1 位小数）。	$V = (4/3)\pi r^3$，$dV/dt = 4\pi r^2 \times dr/dt = 4 \times 3.14 \times 36 \times 0.5 \approx 226.1$ cm³/s	4
16	一块长方形胶片的周界为 40 cm。求它能围成的最大面积。	设长 x，阔 $20 - x$，面积 $A = x(20 - x)$，$A' = 20 - 2x = 0$ 得 $x = 10$，最大面积 $= 10 \times 10 = 100$ cm²	4

戊部　积分、面积与梯形法则（16 分）

回答下列各题，须列出计算步骤。

#	题目	答案	分数
17	计算 $\int_{1}^{2} (6x^2 - 4x + 3)\,dx$。	原函数为 $2x^3 - 2x^2 + 3x$；代入 2 得 14，代入 1 得 3，定积分 $= 14 - 3 = 11$	4
18	求曲线 $y = x^2$ 与直线 $y = 4$ 所围成的区域面积。	交点为 $x = \pm 2$，面积 $= \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = [4x - x^3/3] = 32/3 \approx 10.67$	4
19	已知 $f(x) = x^2$，取 $x = 1, 2, 3, 4$ 四点。求 (a) 用梯形法则估算 $\int_{1}^{4} f(x)\,dx$；(b) 与真值比较的绝对误差。	(a) $h = 1$，$T = 1/2\,[1 + 16 + 2(4 + 9)] = 21.5$；(b) 真值 $= (64 - 1)/3 = 21$，绝对误差 $= 0.5$	4
20	计算 (a) $\int_0^2 (3x^2 + 2x)\,dx$；(b) $\int_{1}^{4} \sqrt{x}\,dx$（准至 3 位有效数字）。	(a) $[x^3 + x^2]_0^2 = 8 + 4 = 12$；(b) $[(2/3)x\text{^}(3/2)]_1^4 = (2/3)(8 - 1) = 14/3 \approx 4.67$	4

己部　概率与统计应用（16 分）

回答下列各题，须列出计算步骤。

#	题目	答案	分数
21	设 X 服从二项分布 B(10, 0.3)。求 (a) 期望值与方差；(b) P(X = 3)（准至 3 位小数）。	(a) 期望值 = $10 \times 0.3 = 3$，方差 = $10 \times 0.3 \times 0.7 = 2.1$；(b) $\binom{10}{3}(0.3)^3(0.7)^7 \approx 0.267$	4
22	某考试成绩呈正态分布，平均值 60 分，标准差 8 分。已知 P(Z < 1) = 0.8413、P(Z < 2) = 0.9772，求 (a) P(X < 68)；(b) 使 P(X < k) = 0.9772 的 k。	(a) $z = (68 - 60)/8 = 1$，P(X < 68) = 0.8413；(b) $z = 2$，故 $(k - 60)/8 = 2$，$k = 76$	4
23	已知 P(A) = 0.6、P(B ∣ A) = 0.5、P(B ∣ A′) = 0.25。求 (a) P(B)；(b) P(A ∣ B)。	(a) $P(B) = 0.6 \times 0.5 + 0.4 \times 0.25 = 0.3 + 0.1 = 0.4$；(b) $P(A \mid B) = 0.3 \div 0.4 = 0.75$	4
24	某服务台每小时平均接到 2 个电话，并服从泊松分布。取 $e^{-2} = 0.1353$，求 (a) 一小时内没有电话的几率；(b) 一小时内最多 1 个电话的几率（准至 4 位小数）。	(a) $P(X = 0) = e^{-2} = 0.1353$；(b) $P(X \le 1) = e^{-2}(1 + 2) = 3 \times 0.1353 = 0.4059$	4