中五數學延伸單元一（M1）練習卷：二項式定理與數列、指數與對數、極限與求導、微分應用、積分與面積、梯形法則、二項與正態分佈（100 分）

年級：中五　｜　科目：數學延伸單元一（M1）　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　題數：24　｜　答案版

甲部　二項式定理與數列（18 分）

回答下列各題，須列出計算步驟。

#	題目	答案	分數
1	展開 $(1 + 2x)^5$，求 (a) 展開式中 x^3 的係數；(b) 展開式各項係數之和；(c) 常數項。	(a) $C(5,3) \times 2^3 = 10 \times 8 = 80$；(b) 令 $x = 1$，係數和 $= (1 + 2)^5 = 243$；(c) 常數項 $= 1$	5
2	在 $(2 + x/2)^8$ 的展開式中，求 (a) x^5 的係數；(b) 展開式共有多少項。	(a) 一般項 $C(8,r)\,2^{(8-r)}\,(x/2)^r$，取 $r = 5$：$C(8,5) \times 2^3 \times (1/2)^5 = 56 \times 8/32 = 14$；(b) 共 $8 + 1 = 9$ 項	5
3	某等差數列首項為 7，公差為 5。求 (a) 使第 n 項等於 122 的 n；(b) 該數列首 24 項之和。	(a) $7 + 5(n - 1) = 122$，解得 $n = 24$；(b) $S_{24} = 24/2 \times (7 + 122) = 12 \times 129 = 1548$	4
4	某等比數列首項為 5，公比為 1/3。求 (a) 無限項之和；(b) 第 6 項（準至 4 位小數）。	(a) $S_\infty = 5 \div (1 - 1/3) = 7.5$；(b) 第 6 項 $= 5 \times (1/3)^5 = 5/243 \approx 0.0206$	4

乙部　指數、對數與指數增長（16 分）

回答下列各題，須列出計算步驟。

#	題目	答案	分數
5	解方程 $3^{(2x - 1)} = 27^{(x + 1)}$。	$27^{(x+1)} = 3^{(3x+3)}$，故 $2x - 1 = 3x + 3$，解得 $x = -4$	4
6	求 (a) $\log_2 48 - \log_2 3$ 的值；(b) 若 $\log_a 9 = 2$，求 a。	(a) $\log_2 (48 \div 3) = \log_2 16 = 4$；(b) $a^2 = 9$，且 $a > 0$，故 $a = 3$	4
7	某培養皿內細菌每 4 小時增加一倍，開始時有 500 個。求 (a) 24 小時後的數目；(b) 數目首次達到 16 000 所需的時間。	(a) $24 \div 4 = 6$，$500 \times 2^6 = 32\,000$；(b) $500 \times 2^k = 16\,000$，$2^k = 32$，$k = 5$，即 20 小時	4
8	某放射性物質半衰期為 12 年，現有樣本 80 g。求 (a) 36 年後的質量；(b) 質量 m 與時間 t（年）的關係。	(a) $36 \div 12 = 3$，$80 \times (1/2)^3 = 10$ g；(b) $m = 80 \times 2^{(-t/12)}$（g）	4

丙部　極限與求導法（18 分）

回答下列各題，須列出計算步驟。

#	題目	答案	分數

9	已知 $y = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$。求 (a) dy/dx；(b) 曲線在 $x = 2$ 處的切線斜率。	(a) $dy/dx = 12x^3 - 6x^2 + 5$；(b) $x = 2$ 時斜率 $= 96 - 24 + 5 = 77$	5
10	已知 $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 2)$。求 (a) $f'(x)$；(b) $f'(1)$。	(a) 用積法則：$f'(x) = 2x(3x - 2) + 3(x^2 + 1) = 9x^2 - 4x + 3$；(b) $f'(1) = 8$	5
11	求下列極限：(a) $\lim(x\to 3)\ (x^2 - 9)/(x - 3)$；(b) $\lim(x\to 0)\ \sin 5x / x$。	(a) 分子分解為 $(x - 3)(x + 3)$，約去 $x - 3$ 後得 $x + 3 \to 6$；(b) 極限 $= 5$	4
12	求下列極限：(a) $\lim(x\to\infty)\ (4x^2 + 3x - 1)/(2x^2 - x + 5)$；(b) $\lim(x\to 2)\ (x^3 - 8)/(x - 2)$。	(a) 分子分母同除以 x^2，極限 $= 4/2 = 2$；(b) 由導數 $3x^2$ 在 $x = 2$ 的值得 12	4

丁部　微分應用（16 分）

回答下列各題，須列出計算步驟。

#	題目	答案	分數
13	已知曲線 $y = x^3 - 2x$。求 (a) 曲線在 $x = 1$ 處的切線方程；(b) 該切線的 y 軸截距。	(a) $y' = 3x^2 - 2$，$x = 1$ 時斜率 $= 1$，點為 $(1, -1)$，切線 $y = x - 2$；(b) y 軸截距 $= -2$	4
14	已知 $y = x^3 - 3x^2 + 4$。求 (a) 所有駐點的 x 值；(b) 各駐點的性質與對應的 y 值。	(a) $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$，故 $x = 0$ 或 $x = 2$；(b) $x = 0$ 為極大點，$y = 4$；$x = 2$ 為極小點，$y = 0$	4
15	一個圓球的半徑以 0.5 cm/s 增加。當半徑為 6 cm 時，求體積的增加率（取 $\pi = 3.14$，準至 1 位小數）。	$V = (4/3)\pi r^3$，$dV/dt = 4\pi r^2 \times dr/dt = 4 \times 3.14 \times 36 \times 0.5 \approx 226.1\ \text{cm}^3/\text{s}$	4
16	一塊長方形膠片的周界為 40 cm。求它能圍成的最大面積。	設長 x，闊 $20 - x$，面積 $A = x(20 - x)$，$A' = 20 - 2x = 0$ 得 $x = 10$，最大面積 $= 10 \times 10 = 100\ \text{cm}^2$	4

戊部　積分、面積與梯形法則（16 分）

回答下列各題，須列出計算步驟。

#	題目	答案	分數
17	計算 $\int_{1}^{2} (6x^2 - 4x + 3)\,dx$。	原函數為 $2x^3 - 2x^2 + 3x$；代入 2 得 14，代入 1 得 3，定積分 $= 14 - 3 = 11$	4
18	求曲線 $y = x^2$ 與直線 $y = 4$ 所圍成的區域面積。	交點為 $x = \pm 2$，面積 $= \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx = [4x - x^3/3] = 32/3 \approx 10.67$	4
19	已知 $f(x) = x^2$，取 $x = 1, 2, 3, 4$ 四點。求 (a) 用梯形法則估算 $\int_{1}^{4} f(x)\,dx$；(b) 與真值比較的絕對誤差。	(a) $h = 1$，$T = 1/2\ [1 + 16 + 2(4 + 9)] = 21.5$；(b) 真值 $= (64 - 1)/3 = 21$，絕對誤差 $= 0.5$	4
20	計算 (a) $\int_0^2 (3x^2 + 2x)\,dx$；(b) $\int_{1}^{4} \sqrt{x}\,dx$（準至 3 位有效數字）。	(a) $[x^3 + x^2]_0^2 = 8 + 4 = 12$；(b) $[(2/3)x\text{^}(3/2)]_1^4 = (2/3)(8 - 1) = 14/3 \approx 4.67$	4

己部　概率與統計應用（16 分）

回答下列各題，須列出計算步驟。

#	題目	答案	分數
21	設 X 服從二項分佈 B(10, 0.3)。求 (a) 期望值與方差；(b) P(X = 3)（準至 3 位小數）。	(a) 期望值 = $10 \times 0.3 = 3$，方差 = $10 \times 0.3 \times 0.7 = 2.1$；(b) $\binom{10}{3}(0.3)^3(0.7)^7 \approx 0.267$	4
22	某考試成績呈正態分佈，平均值 60 分，標準差 8 分。已知 P(Z < 1) = 0.8413、P(Z < 2) = 0.9772，求 (a) P(X < 68)；(b) 使 P(X < k) = 0.9772 的 k。	(a) $z = (68 - 60)/8 = 1$，P(X < 68) = 0.8413；(b) $z = 2$，故 $(k - 60)/8 = 2$，$k = 76$	4
23	已知 P(A) = 0.6、P(B ∣ A) = 0.5、P(B ∣ A′) = 0.25。求 (a) P(B)；(b) P(A ∣ B)。	(a) $P(B) = 0.6 \times 0.5 + 0.4 \times 0.25 = 0.3 + 0.1 = 0.4$；(b) $P(A \mid B) = 0.3 \div 0.4 = 0.75$	4
24	某服務台每小時平均接到 2 個電話，並服從泊松分佈。取 $e^{-2} = 0.1353$，求 (a) 一小時內沒有電話的機率；(b) 一小時內最多 1 個電話的機率（準至 4 位小數）。	(a) $P(X = 0) = e^{-2} = 0.1353$；(b) $P(X \le 1) = e^{-2}(1 + 2) = 3 \times 0.1353 = 0.4059$	4