中四数学延伸部分单元二

中四　数学延伸部分单元二（M2）　|　时限：75 分钟　|　总分：100 分　|　共 24 题

甲部：数学归纳法与二项式定理

第 1 题（16 分）

1. 用数学归纳法证明：对所有正整数 n，$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$。

答案：当 $n = 1$：左式 $= 1$，右式 $= 1\times2\times3/6 = 1$，命题成立。假设对某正整数 k 成立，即 $k(k+1)(2k+1)/6 = 1^2+\cdots+k^2$；则 $1^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 = k(k+1)(2k+1)/6 + (k+1)^2 = (k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]/6 = (k+1)(2k^2+7k+6)/6 = (k+1)(k+2)(2k+3)/6$，即命题对 $k+1$ 亦成立。由数学归纳法，命题对所有正整数 n 成立。

2. 利用上题公式，求 $10^2 + 11^2 + \cdots + 15^2$ 的值。

答案：$10^2+\cdots+15^2 = (1^2+\cdots+15^2) - (1^2+\cdots+9^2) = 15\times16\times31/6 - 9\times10\times19/6 = 1240 - 285 = 955$。

3. 求 $(2x - 3/x)^6$　展开式中的常数项。

答案：通项 $= C(6,r)(2x)^{(6-r)}(-3/x)^r = C(6,r)2^{(6-r)}(-3)^r\, x^{(6-2r)}$。常数项须 $6-2r = 0$，即 $r = 3$，故常数项 $= C(6,3)\times2^3\times(-3)^3 = 20\times8\times(-27) = -4320$。

4. 求 $(2x - 3/x)^6$　展开式中 x^4　的系数。

答案：令 $6-2r = 4$，得 $r = 1$，故 x^4　的系数 $= C(6,1)\times2^5\ \times(-3)^1 = 6\times32\times(-3) = -576$。

乙部：三角学

第 2 题（16 分）

5. 不使用计算机，求 $\sin 15^\circ$　的精确值。

答案：$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin45^\circ\cos30^\circ - \cos45^\circ\sin30^\circ = (\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) - (\sqrt{2}/2)(1/2) = (\sqrt{6}-\sqrt{2})/4 \approx 0.2588$。

6. 已知 A 与 B 均为锐角，且 $\sin A = 3/5$、$\cos B = 5/13$。求 $\sin(A + B)$。

答案：由毕氏定理得 $\cos A = 4/5$、$\sin B = 12/13$。$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B = (3/5)(5/13) + (4/5)(12/13) = 15/65 + 48/65 = 63/65 \approx 0.9692$。

7. 解方程 $2\sin^2x + \sin x - 1 = 0$，其中 $0^\circ \leqslant x \leqslant 360^\circ$。

答案：因式分解：$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$，故 $\sin x = 1/2$ 或 $\sin x = -1$。由 $\sin x = 1/2$ 得 $x = 30^\circ$ 或 150°；由 $\sin x = -1$ 得 $x = 270^\circ$。故解为 $x = 30^\circ$、150°、270°。

8. 证明恒等式 $(1 - \cos 2\theta) / \sin 2\theta = \tan\theta$。

答案：左式 $= (1 - (1 - 2\sin^2\theta)) / (2\sin\theta\cos\theta) = 2\sin^2\theta / (2\sin\theta\cos\theta) = \sin\theta/\cos\theta = \tan\theta$，故恒等式成立。

丙部：极限与微分

第 3 题（16 分）

9. 求 $\lim_{x\to 3}(x^2-9)/(x-3)$。

答案：$(x^2-9)/(x-3)=(x-3)(x+3)/(x-3)=x+3$（$x\neq 3$），故极限 $=3+3=6$。

10. 设 $y=(3x^2+1)^4$。求当 $x=1$ 时 dy/dx 的值。

答案：$dy/dx=4(3x^2+1)^3\times 6x$。当 $x=1$：$dy/dx=4\times 4^3\times 6=1536$。

11. 求曲线 $y=x^3-3x$ 在 $x=2$ 处的切线方程。

答案：$dy/dx=3x^2-3$，在 $x=2$ 时斜率 $=9$；曲线上点为 $(2,2^3-6)=(2,2)$。切线方程：$y-2=9(x-2)$，即 $y=9x-16$。

12. 求 $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/x^2$。

答案：利用 $1-\cos x=2\sin^2(x/2)$：$(1-\cos x)/x^2=2\sin^2(x/2)/x^2$。当 $x\to 0$，$\sin(x/2)/(x/2)\to 1$，故极限 $=2\times(1/2)^2=1/2$。

丁部：积分

第 4 题（16 分）

13. 求 $\int_0^3(2x+1)\,dx$。

答案：$\int(2x+1)dx=x^2+x$；由 0 至 3 得 $(9+3)-0=12$。

14. 求由直线 $y=2x$ 与曲线 $y=x^2$ 所围成区域的面积。

答案：交点：$x^2=2x$，得 $x=0$ 或 2。面积 $=\int_0^2(2x-x^2)dx=[x^2-x^3/3]_0^2=4-8/3=4/3\approx 1.333$。

15. 求 $\int_0^1 2x/(x^2+1)\,dx$。

答案：令 $u=x^2+1$，$du=2x\,dx$；积分变为 $\int_1^2 du/u=[\ln u]_1^2=\ln 2\approx 0.6931$。

16. 曲线 $y=x^2$（$0\le x\le 2$）绕 x 轴旋转一周。求所成旋转体的体积。

答案：体积 $=\pi\int_0^2 y^2\,dx=\pi\int_0^2 x^4\,dx=\pi[x^5/5]_0^2=32\pi/5\approx 20.11$。

戊部：矩阵与线性变换

第 5 题（16 分）

17. 设 $A=[[3,1],[2,4]]$。求 $\det A$ 及 A^{-1}。

答案：$\det A=3\times 4-1\times 2=10\neq 0$，故 A 可逆；$A^{-1}=(1/10)[[4,-1],[-2,3]]$。

18. 解联立方程 $3x+y=7$ 及 $2x+4y=18$。

答案：由第一式 $y=7-3x$，代入第二式：$2x+4(7-3x)=18$，得 $-10x=-10$，故 $x=1$、$y=4$。

19. 写出逆时针旋转 90° 的变换矩阵，并求点 $(3,-2)$ 在该变换下的像。

答案：逆时针旋转 90° 的矩阵为 $[[0,-1],[1,0]]$；$[[0,-1],[1,0]]\times(3,-2)^{\mathsf T}=(2,3)^{\mathsf T}$，故像为 $(2,3)$。

20. 设 $B=[[2,-1],[5,3]]$。求 $\det B$ 及 $\det(AB)$，其中 A 为上题的矩阵。

答案：$\det B=2\times 3-(-1)\times 5=11$；因 $\det(AB)=\det A\times\det B=10\times 11=110$。

己部：向量

第 6 题（20 分）

21. 设 $\mathbf{a}=(2,-1,3)$、$\mathbf{b}=(1,4,-2)$。求 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 及 $|\mathbf{a}|$（准确至 3 位小数）。

答案：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=2\times1+(-1)\times4+3\times(-2)=2-4-6=-8$；$|\mathbf{a}|=\sqrt{(4+1+9)}=\sqrt{14}\approx3.7417$。

22. 求 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角，准确至 0.1°。

答案：$|\mathbf{b}|=\sqrt{(1+16+4)}=\sqrt{21}$。$\cos\theta=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|)=-8/\sqrt{294}\approx-0.4666$，故 $\theta\approx117.8^\circ$。

23. 求 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$，并求以 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 为邻边的平行四边形面积。

答案：$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=|\,\mathbf{i}\ \mathbf{j}\ \mathbf{k};\ 2\ -1\ 3;\ 1\ 4\ -2\,|=(-10,7,9)$；面积 $=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{(100+49+81)}=\sqrt{230}\approx15.166$。

24. 求 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 上的投影向量。

答案：投影向量 $=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/|\mathbf{a}|^2)\,\mathbf{a}=(-8/14)(2,-1,3)=(-8/7,4/7,-12/7)$。

TutorZone 中四数学延伸部分单元二（M2）练习卷｜题目与文章为原创，并非任何学校或出版社的教材。