中四數學延伸部分單元二

中四　數學延伸部分單元二（M2）　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

甲部：數學歸納法與二項式定理

第 1 題（16 分）

1. 用數學歸納法證明：對所有正整數 n，$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$。

答案：當 n = 1：左式 = 1，右式 = 1×2×3/6 = 1，命題成立。假設對某正整數 k 成立，即 $k(k+1)(2k+1)/6 = 1^2+\cdots+k^2$；則 $1^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 = k(k+1)(2k+1)/6 + (k+1)^2 = (k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]/6 = (k+1)(2k^2+7k+6)/6 = (k+1)(k+2)(2k+3)/6$，即命題對 k+1 亦成立。由數學歸納法，命題對所有正整數 n 成立。

2. 利用上題公式，求 $10^2 + 11^2 + \cdots + 15^2$ 的值。

答案：$10^2+\cdots+15^2 = (1^2+\cdots+15^2) - (1^2+\cdots+9^2) = 15\times16\times31/6 - 9\times10\times19/6 = 1240 - 285 = 955$。

3. 求 $(2x - 3/x)^6$　展開式中的常數項。

答案：通項 = C(6,r)(2x)^(6−r)(−3/x)^r = C(6,r)2^(6−r)(−3)^r x^(6−2r)。常數項須 6−2r = 0，即 r = 3，故常數項 = $C(6,3)\times2^3\times(-3)^3 = 20\times8\times(-27) = -4320$。

4. 求 $(2x - 3/x)^6$　展開式中 x^4　的係數。

答案：令 6−2r = 4，得 r = 1，故 x^4　的係數 = $C(6,1)\times2^5\ \times(-3)^1 = 6\times32\times(-3) = -576$。

乙部：三角學

第 2 題（16 分）

5. 不使用計算機，求 sin 15°　的精確值。

答案：sin 15°　= sin(45°　− 30°) = sin45° cos30°　− cos45° sin30°　= $(\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) - (\sqrt{2}/2)(1/2) = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4 \approx 0.2588$。

6. 已知 A 與 B 均為銳角，且 sin A = 3/5、cos B = 5/13。求 sin(A + B)。

答案：由畢氏定理得 cos A = 4/5、sin B = 12/13。sin(A+B) = sinA cosB + cosA sinB = (3/5)(5/13) + (4/5)(12/13) = 15/65 + 48/65 = 63/65 ≈ 0.9692。

7. 解方程 $2\sin^2x + \sin x - 1 = 0$，其中 0°　⩽ x ⩽ 360°　。

答案：因式分解：(2sin x − 1)(sin x + 1) = 0，故 sin x = 1/2 或 sin x = −1。由 sin x = 1/2 得 x = 30°　或 150°　；由 sin x = −1 得 x = 270°　。故解為 x = 30°　、150°　、270°　。

8. 證明恆等式 $(1 - \cos 2\theta) / \sin 2\theta = \tan\theta$。

答案：左式 = (1 − (1 − 2sin²θ)) / (2 sinθ cosθ) = 2sin²θ / (2 sinθ cosθ) = sinθ/cosθ = tan θ，故恆等式成立。

丙部：極限與微分

第 3 題（16 分）

9. 求 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$。

答案：$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3$（$x\neq 3$），故極限 $=3+3=6$。

10. 設 $y=(3x^2+1)^4$。求當 $x=1$ 時 $\frac{dy}{dx}$ 的值。

答案：$\frac{dy}{dx}=4(3x^2+1)^3\times 6x$。當 $x=1$：$\frac{dy}{dx}=4\times 4^3\times 6=1536$。

11. 求曲線 $y=x^3-3x$ 在 $x=2$ 處的切線方程。

答案：$\frac{dy}{dx}=3x^2-3$，在 $x=2$ 時斜率 $=9$；曲線上點為 $(2,\,2^3-6)=(2,\,2)$。切線方程：$y-2=9(x-2)$，即 $y=9x-16$。

12. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$。

答案：利用 $1-\cos x=2\sin^2(x/2)$：$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}$。當 $x\to 0$，$\frac{\sin(x/2)}{x/2}\to 1$，故極限 $=2\times(1/2)^2=1/2$。

丁部：積分

第 4 題（16 分）

13. 求 $\int_0^3(2x+1)\,dx$。

答案：$\int(2x+1)dx=x^2+x$；由 0 至 3 得 $(9+3)-0=12$。

14. 求由直線 $y=2x$ 與曲線 $y=x^2$ 所圍成區域的面積。

答案：交點：$x^2=2x$，得 $x=0$ 或 2。面積 $=\int_0^2(2x-x^2)dx=\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}\approx 1.333$。

15. 求 $\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}\,dx$。

答案：令 $u=x^2+1$，$du=2x\,dx$；積分變為 $\int_1^2\frac{du}{u}=[\ln u]_1^2=\ln 2\approx 0.6931$。

16. 曲線 $y=x^2$（$0\le x\le 2$）繞 x 軸旋轉一週。求所成旋轉體的體積。

答案：體積 $=\pi\int_0^2 y^2\,dx=\pi\int_0^2 x^4\,dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{32\pi}{5}\approx 20.11$。

戊部：矩陣與線性變換

第 5 題（16 分）

17. 設 $A=\begin{bmatrix}3&1\\2&4\end{bmatrix}$。求 $\det A$ 及 A^{-1}。

答案：$\det A=3\times 4-1\times 2=10\neq 0$，故 A 可逆；$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}4&-1\\-2&3\end{bmatrix}$。

18. 解聯立方程 $3x+y=7$ 及 $2x+4y=18$。

答案：由第一式 $y=7-3x$，代入第二式：$2x+4(7-3x)=18$，得 $-10x=-10$，故 $x=1$、$y=4$。

19. 寫出逆時針旋轉 90° 的變換矩陣，並求點 $(3,-2)$ 在該變換下的像。

答案：逆時針旋轉 90° 的矩陣為 $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$；$\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\times(3,-2)^{\mathsf T}=(2,3)^{\mathsf T}$，故像為 $(2,3)$。

20. 設 $B=\begin{bmatrix}2&-1\\5&3\end{bmatrix}$。求 $\det B$ 及 $\det(AB)$，其中 A 為上題的矩陣。

答案：$\det B=2\times 3-(-1)\times 5=11$；因 $\det(AB)=\det A\times\det B=10\times 11=110$。

己部：向量

第 6 題（20 分）

21. 設 $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$、$\mathbf{b} = (1, 4, -2)$。求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 及 $|\mathbf{a}|$（準確至 3 位小數）。

答案：$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2\times1 + (-1)\times4 + 3\times(-2) = 2 - 4 - 6 = -8$；$|\mathbf{a}| = \sqrt{(4 + 1 + 9)} = \sqrt{14} \approx 3.7417$。

22. 求 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 的夾角，準確至 0.1°。

答案：$|\mathbf{b}| = \sqrt{(1 + 16 + 4)} = \sqrt{21}$。$\cos\theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} / (|\mathbf{a}||\mathbf{b}|) = -8/\sqrt{294} \approx -0.4666$，故 $\theta \approx 117.8°$。

23. 求 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$，並求以 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 為鄰邊的平行四邊形面積。

答案：$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{i}\ \mathbf{j}\ \mathbf{k};\ 2\ -1\ 3;\ 1\ 4\ -2| = (-10, 7, 9)$；面積 $= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(100 + 49 + 81)} = \sqrt{230} \approx 15.166$。

24. 求 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{a}$ 上的投影向量。

答案：投影向量 $= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} / |\mathbf{a}|^2)\,\mathbf{a} = (-8/14)(2, -1, 3) = (-8/7, 4/7, -12/7)$。

TutorZone 中四數學延伸部分單元二（M2）練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。