中四数学延伸部分单元一练习卷：二项式定理、指数与对数、极限与导数、求导法则与切线法线、极值与应用、定积分与梯形法则

中四　数学延伸部分单元一　|　时限：75 分钟　|　总分：100 分　|　共 24 题

第一部分：二项式定理（16 分）

须展示展开或组合数步骤。

1. 求 (1 + 2x)^5 展开式中 x^3 的系数。
答案：系数 = C(5,3)×2^3 = 10×8 = 80。

2. 求 (2 - x)^6 展开式中 x^2 的系数。
答案：系数 = C(6,2)×2^4×(-1)^2 = 15×16 = 240。

3. 求 (1 + 3x)(1 + x)^7 展开式中 x^2 的系数。
答案：x^2 系数 = C(7,2) + 3×C(7,1) = 21 + 21 = 42。

4. 设 n 为正整数。若 (1 + x)^n 展开式中 x^2 的系数为 45，求 n。
答案：n(n-1)/2 = 45 → n^2 - n - 90 = 0 → n = 10（n 为正整数）。

第二部分：指数与对数方程（16 分）

答案须准确，非整数答案以对数表示。

5. 解方程 3^(2x-1) = 27。
答案：27 = 3^3，故 2x - 1 = 3，x = 2。

6. 解方程 log2 x + log2 (x - 2) = 3。
答案：log2[x(x-2)] = 3 → x(x-2) = 8 → x^2 - 2x - 8 = 0 → x = 4 或 x = -2（舍去，因 x > 2）。

7. 解方程 e^(2x) - 5e^x + 6 = 0，答案以对数表示。
答案：设 u = e^x：u^2 - 5u + 6 = 0 → u = 2 或 3 → x = ln 2 或 x = ln 3（即约 0.693 或 1.099）。

8. 化简 log_a 8 + log_a 2 - log_a 4，其中 a > 0 且 a 不等于 1。
答案：原式 = log_a (8×2/4) = log_a 4 = 2 log_a 2。

第三部分：极限与基本原理求导（18 分）

不得直接代入或只写答案。

9. 求 lim (x→3) (x^2 - 9)/(x - 3)。
答案：分子因式分解：(x-3)(x+3)，约去 x-3 后得 x + 3 → 3 + 3 = 6。

10. 求 lim (x→0) (√(1 + x) - 1)/x。
答案：乘共轭：分子分母乘 (√(1+x) + 1)，得 1/(√(1+x) + 1) → 1/2 = 0.5。

11. 设 f(x) = x^2 + 3x。用基本原理求 f'(x)，并求 f'(2)。

答案：(f(x+h) - f(x))/h = 2x + h + 3 → h→0 得 f'(x) = 2x + 3，故 f'(2) = 4 + 3 = 7。

12. 求 lim (x→∞) (3x^2 + 5x)/(2x^2 - 1)。

答案：分子分母同除以 x^2：得 (3 + 5/x)/(2 - 1/x^2) → 3/2 = 1.5。

第四部分：求导法则、切线与法线（18 分）

须写出导函数再代入数值。

13. 设 y = x^3 - 4x，求 dy/dx 在 x = 2 时的值。

答案：dy/dx = 3x^2 - 4，代入 x = 2 得 12 - 4 = 8。

14. 设 y = (2x + 1)^5，求 dy/dx 在 x = 1 时的值。

答案：连锁律：dy/dx = 5(2x+1)^4×2 = 10(2x+1)^4；x = 1 得 10×81 = 810。

15. 求曲线 y = x^2 在点 (3, 9) 的切线方程。

答案：dy/dx = 2x = 6；y - 9 = 6(x - 3) → y = 6x - 9，即 6x - y - 9 = 0。

16. 求曲线 y = x^2 在点 (3, 9) 的法线方程。

答案：法线斜率 = -1/6；y - 9 = -(x - 3)/6 → x + 6y - 57 = 0。

第五部分：极值与率相关变化（18 分）

求极值须用一阶导数检验。

17. 求 y = x^3 - 3x^2 + 4 的极大值与极小值。

答案：dy/dx = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)；x = 0 时 y = 4（极大），x = 2 时 y = 0（极小）。

18. 长方形的周界为 40 cm，求其最大面积。

答案：设长 x，阔 20 - x；面积 A = x(20 - x)。A' = 20 - 2x = 0 → x = 10，A = 10×10 = 100 cm^2。

19. 球体体积 V = (4/3)πr^3。当 r = 3 cm 时体积以 36π cm^3/s 增加，求此时半径的增加率。

答案：dV/dr = 4πr^2 = 36π；dV/dt = (dV/dr)(dr/dt) → 36π = 36π(dr/dt) → dr/dt = 1 cm/s。

20. 设 y = x + 4/x，其中 x > 0。求 y 的极小值及对应的 x。

答案：dy/dx = 1 - 4/x^2 = 0 → x = 2；y = 2 + 2 = 4（二阶导数 8/x^3 > 0，故为极小）。

第六部分：定积分与梯形法则（14 分）

数值答案取三位小数。

21. 求 ∫ (1 至 2) (3x^2 + 2x) dx。

答案：原函数 x^3 + x^2；(8 + 4) - (1 + 1) = 12 - 2 = 10。

22. 求 ∫ (1 至 e) (1/x) dx。

答案：原函数 ln x；ln e - ln 1 = 1 - 0 = 1。

23. 用梯形法则（h = 0.5，取五个纵坐标）估算 ∫(0 至 2) x^2 dx，并判断估算值过大还是过小。

答案：h/2[f(0) + 2(f(0.5) + f(1) + f(1.5)) + f(2)] = 0.25(0 + 7 + 4) = 2.75；真值 8/3 ≈ 2.667，故估算过大。

24. 求曲线 y = x^2 与 x 轴之间由 x = 0 至 x = 3 的区域面积。

答案：面积 = ∫ x^2 dx = [x^3/3]，由 0 至 3 得 27/3 = 9 平方单位。

TutorZone 中四数学延伸部分单元一练习卷｜题目与文章为原创，并非任何学校或出版社的教材。