中四數學延伸部分單元一練習卷：二項式定理、指數與對數、極限與導數、求導法則與切線法線、極值與應用、定積分與梯形法則

中四　數學延伸部分單元一　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

第一部分：二項式定理（16 分）

須展示展開或組合數步驟。

1. 求 (1 + 2x)^5 展開式中 x^3 的係數。
答案：係數 = C(5,3)×2^3 = 10×8 = 80。

2. 求 (2 - x)^6 展開式中 x^2 的係數。
答案：係數 = C(6,2)×2^4×(-1)^2 = 15×16 = 240。

3. 求 (1 + 3x)(1 + x)^7 展開式中 x^2 的係數。
答案：x^2 係數 = C(7,2) + 3×C(7,1) = 21 + 21 = 42。

4. 設 n 為正整數。若 (1 + x)^n 展開式中 x^2 的係數為 45，求 n。
答案：n(n-1)/2 = 45 → n^2 - n - 90 = 0 → n = 10（n 為正整數）。

第二部分：指數與對數方程（16 分）

答案須準確，非整數答案以對數表示。

5. 解方程 3^(2x-1) = 27。
答案：27 = 3^3，故 2x - 1 = 3，x = 2。

6. 解方程 log2 x + log2 (x - 2) = 3。
答案：log2[x(x-2)] = 3 → x(x-2) = 8 → x^2 - 2x - 8 = 0 → x = 4 或 x = -2（捨去，因 x > 2）。

7. 解方程 e^(2x) - 5e^x + 6 = 0，答案以對數表示。
答案：設 u = e^x：u^2 - 5u + 6 = 0 → u = 2 或 3 → x = ln 2 或 x = ln 3（即約 0.693 或 1.099）。

8. 化簡 log_a 8 + log_a 2 - log_a 4，其中 a > 0 且 a 不等於 1。
答案：原式 = log_a (8×2/4) = log_a 4 = 2 log_a 2。

第三部分：極限與基本原理求導（18 分）

不得直接代入或只寫答案。

9. 求 lim (x→3) (x^2 - 9)/(x - 3)。
答案：分子因式分解：(x-3)(x+3)，約去 x-3 後得 x + 3 → 3 + 3 = 6。

10. 求 lim (x→0) (√(1 + x) - 1)/x。
答案：乘共軛：分子分母乘 (√(1+x) + 1)，得 1/(√(1+x) + 1) → 1/2 = 0.5。

11. 設 f(x) = x^2 + 3x。用基本原理求 f'(x)，並求 f'(2)。

答案：(f(x+h) - f(x))/h = 2x + h + 3 → h→0 得 f'(x) = 2x + 3，故 f'(2) = 4 + 3 = 7。

12. 求 lim (x→∞) (3x^2 + 5x)/(2x^2 - 1)。

答案：分子分母同除以 x^2：得 (3 + 5/x)/(2 - 1/x^2) → 3/2 = 1.5。

第四部分：求導法則、切線與法線（18 分）

須寫出導函數再代入數值。

13. 設 y = x^3 - 4x，求 dy/dx 在 x = 2 時的值。

答案：dy/dx = 3x^2 - 4，代入 x = 2 得 12 - 4 = 8。

14. 設 y = (2x + 1)^5，求 dy/dx 在 x = 1 時的值。

答案：連鎖律：dy/dx = 5(2x+1)^4×2 = 10(2x+1)^4；x = 1 得 10×81 = 810。

15. 求曲線 y = x^2 在點 (3, 9) 的切線方程。

答案：dy/dx = 2x = 6；y - 9 = 6(x - 3) → y = 6x - 9，即 6x - y - 9 = 0。

16. 求曲線 y = x^2 在點 (3, 9) 的法線方程。

答案：法線斜率 = -1/6；y - 9 = -(x - 3)/6 → x + 6y - 57 = 0。

第五部分：極值與率相關變化（18 分）

求極值須用一階導數檢驗。

17. 求 y = x^3 - 3x^2 + 4 的極大值與極小值。

答案：dy/dx = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)；x = 0 時 y = 4（極大），x = 2 時 y = 0（極小）。

18. 長方形的周界為 40 cm，求其最大面積。

答案：設長 x，闊 20 - x；面積 A = x(20 - x)。A' = 20 - 2x = 0 → x = 10，A = 10×10 = 100 cm^2。

19. 球體體積 V = (4/3)πr^3。當 r = 3 cm 時體積以 36π cm^3/s 增加，求此時半徑的增加率。

答案：dV/dr = 4πr^2 = 36π；dV/dt = (dV/dr)(dr/dt) → 36π = 36π(dr/dt) → dr/dt = 1 cm/s。

20. 設 y = x + 4/x，其中 x > 0。求 y 的極小值及對應的 x。

答案：dy/dx = 1 - 4/x^2 = 0 → x = 2；y = 2 + 2 = 4（二階導數 8/x^3 > 0，故為極小）。

第六部分：定積分與梯形法則（14 分）

數值答案取三位小數。

21. 求 ∫ (1 至 2) (3x^2 + 2x) dx。

答案：原函數 x^3 + x^2；(8 + 4) - (1 + 1) = 12 - 2 = 10。

22. 求 ∫ (1 至 e) (1/x) dx。

答案：原函數 ln x；ln e - ln 1 = 1 - 0 = 1。

23. 用梯形法則（h = 0.5，取五個縱坐標）估算 ∫ (0 至 2) x^2 dx，並判斷估算值過大還是過小。

答案：h/2[f(0) + 2(f(0.5) + f(1) + f(1.5)) + f(2)] = 0.25(0 + 7 + 4) = 2.75；真值 8/3 ≈ 2.667，故估算過大。

24. 求曲線 y = x^2 與 x 軸之間由 x = 0 至 x = 3 的區域面積。

答案：面積 = ∫ x^2 dx = [x^3/3]，由 0 至 3 得 27/3 = 9 平方單位。

TutorZone 中四數學延伸部分單元一練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。