中四数学延伸部分单元一练习卷（第一份）｜二项式、对数方程、归纳法、数列、图像变换

练习卷 · 高中数学延伸部分

中四数学延伸部分单元一（M1）练习卷（第一份），按香港高中数学延伸课程编排，适合校内测验及文凭试备试，涵盖二项展开与系数求法、指数与对数方程、数学归纳法证明、等差与等比数列求和及无限项和、函数图像平移反射伸缩，以及把现实情境转化为函数模型求最大值，每题附完整答案及详细步骤。

1. 二项展开与系数（18 分）

只需求系数，不用展开整式。

#	Question	Answer and marking notes
1	(a) 求 (1 + 2x)^5 展开式中 x^3 的系数。	通项为 C(5, r)(2x)^r；r = 3 时系数 = C(5, 3) × 2^3 = 10 × 8 = 80。
2	(b) 求 (2 − x)^6 展开式中 x^2 的系数。	通项 C(6, r) 2^(6−r) (−x)^r；r = 2 时系数 = C(6, 2) × 2^4 × (−1)^2 = 15 × 16 = 240。
3	(c) 求 (1 + 3x)^7 展开式的常数项与 x 项系数之和。	常数项 = 1；x 项系数 = C(7, 1) × 3 = 21；和 = 1 + 21 = 22。
4	(d) 求 (1 + x)^10 展开式各项系数之总和。	令 x = 1，系数总和 = (1 + 1)^10 = 2^10 = 1024。

2. 指数与对数方程（16 分）

解方程后须检查对数的定义域，(d) 取整数年。

#	Question	Answer and marking notes
5	(a) 解方程 2^(x + 1) = 32。	32 = 2^5，故 x + 1 = 5，x = 4。
6	(b) 解方程 $\log_3 x + \log_3 (x - 2) = 1$。	合并得 $\log_3 [x(x - 2)] = 1$，故 x(x − 2) = 3，x^2 − 2x − 3 = 0，(x − 3)(x + 1) = 0。x = 3 或 x = −1；因 x 及 x − 2 均须为正，x = −1 舍去，故 x = 3。
7	(c) 化简 $\log 8 \div \log 2 + \log_5 25$。	$\log 8 \div \log 2 = \log_2 8 = 3$；$\log_5 25 = 2$；合共 3 + 2 = 5。
8	(d) 一笔款项以每年 6% 复利增长。求最少多少个完整年头，本金才会增至原来的两倍。	解 1.06^n = 2，n = log 2 ÷ log 1.06 = 11.90（二位小数）。11 年后只得 1.898 倍，未够两倍；故最少需 12 个完整年头（1.06^12 = 2.012 倍）。

3. 数学归纳法（18 分）

证明须依次写出基础步骤、归纳假设及归纳步骤。

#	Question	Answer and marking notes
9	(a) 对命题“1 + 3 + 5 + … + (2n − 1) = n^2”，写出 n = 1 的基础步骤。	当 n = 1，左边只有第一项 2(1) − 1 = 1，右边 = 1^2 = 1，左边等于右边，命题对 n = 1 成立。

#	Question	Answer and marking notes
10	(b) 承 (a)，假设命题对 n = k 成立，写出推导至 n = k + 1 的步骤。	假设 1 + 3 + … + (2k − 1) = k^2。则加到第 k + 1 项时：左边 = k^2 + [2(k + 1) − 1] = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2，正是 n = k + 1 时的右边，故命题对 n = k + 1 亦成立；由归纳法原理，命题对所有正整数 n 成立。
11	(c) 用公式验证 1 + 3 + 5 + … + 19 之和。	末项 2n − 1 = 19，n = 10；和 = 10^2 = 100。
12	(d) 求 1 + 3 + 5 + … + 99 之和。	2n − 1 = 99，n = 50；和 = 50^2 = 2500。

4. 数列与求和（16 分）

无限等比数列求和只适用于公比的绝对值小于 1。

#	Question	Answer and marking notes
13	(a) 等差数列首项为 5，公差为 4。求第 12 项。	a_{12} = 5 + (12 − 1) × 4 = 5 + 44 = 49。
14	(b) 承 (a)，求该数列首 12 项之和。	S_{12} = 12 ÷ 2 × (5 + 49) = 6 × 54 = 324。
15	(c) 等比数列首项为 3，公比为 2。求首 8 项之和。	S_8 = 3 × (2^8 − 1) ÷ (2 − 1) = 3 × 255 = 765。
16	(d) 无限等比数列首项为 8，公比为 1/4。求其无限项之和（二位小数）。	因 |1/4| 小于 1，S_∞ = 8 ÷ (1 − 1/4) = 8 ÷ 0.75 = 32/3 = 10.67。

5. 函数图像变换（16 分）

左右平移改 x，上下平移改整个函数值。

#	Question	Answer and marking notes
17	(a) y = f(x) 的图像向右平移 3 单位、再向上平移 2 单位，写出新函数。	向右平移 3 单位即把 x 换成 x − 3；向上平移 2 单位即在函数值加 2，故新函数为 y = f(x − 3) + 2。
18	(b) 承 (a)，若原图像为 y = x^2，求新图像的顶点坐标。	y = (x − 3)^2 + 2，顶点为 (3, 2)。
19	(c) y = f(x) 的图像先沿 y 轴方向伸展为原来的 2 倍，再沿 x 轴反射，写出新函数。	沿 y 轴伸展 2 倍得 y = 2f(x)；沿 x 轴反射得 y = −2f(x)。
20	(d) y = 2^x 的图像向左平移 2 单位后，与 y 轴相交于哪一点？	新函数 y = 2^(x + 2)；令 x = 0，y = 2^2 = 4，交点为 (0, 4)。

6. 应用题建模（16 分）

建模须写出定义域，(d) 取最接近的千位。

#	Question	Answer and marking notes
21	(a) 一长方形周界为 40 m，设阔为 x m。把面积 A（m^2）表示为 x 的函数，并写出定义域。	长 + 阔 = 20，故长 = 20 − x；A = x(20 − x) = 20x − x^2，其中 x 介乎 0 与 20 之间。

#	Question	Answer and marking notes
22	(b) 承 (a)，求该长方形可能的最大面积。	$A = -(x - 10)^2 + 100$，故 $x = 10$ 时 A 最大，最大面积为 100 m^2（此时为 10 m × 10 m 的正方形）。
23	(c) 一球形气球的半径由 3 cm 吹胀至 6 cm。求体积增为原来的多少倍。	球体体积与半径三次方成正比，倍数 = $(6 \div 3)^3 = 2^3 = 8$，即增为原来的 8 倍。
24	(d) 某城市人口模型为 $P(t) = 500\,000 \times 1.02^t$，t 为年数。求 t = 10 时的人口（取最接近的千位）。	$1.02^{10} = 1.21899$（五位小数）；$P(10) = 500\,000 \times 1.21899 = 609\,497$，取最接近千位为 609 000。