中四數學延伸部分單元一練習卷

中四　數學（延伸部分單元一）　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

1. 二項展開與係數（18 分）

只需求係數，不用展開整式。

1. (a) 求 (1 + 2x)^5 展開式中 x^3 的係數。

答案：通項為 C(5, r)(2x)^r；r = 3 時係數 = C(5, 3) × 2^3 = 10 × 8 = 80。

2. (b) 求 (2 − x)^6 展開式中 x^2 的係數。

答案：通項 C(6, r) 2^(6−r) (−x)^r；r = 2 時係數 = C(6, 2) × 2^4 × (−1)^2 = 15 × 16 = 240。

3. (c) 求 (1 + 3x)^7 展開式的常數項與 x 項係數之和。

答案：常數項 = 1；x 項係數 = C(7, 1) × 3 = 21；和 = 1 + 21 = 22。

4. (d) 求 (1 + x)^10 展開式各項係數之總和。

答案：令 x = 1，係數總和 = (1 + 1)^10 = 2^10 = 1024。

2. 指數與對數方程（16 分）

解方程後須檢查對數的定義域，(d) 取整數年。

5. (a) 解方程 2^(x + 1) = 32。

答案：32 = 2^5，故 x + 1 = 5，x = 4。

6. (b) 解方程 $\log_3 x + \log_3 (x - 2) = 1$。

答案：合併得 $\log_3 [x(x - 2)] = 1$，故 x(x − 2) = 3，x^2 − 2x − 3 = 0，(x − 3)(x + 1) = 0。x = 3 或 x = −1；因 x 及 x − 2 均須為正，x = −1 捨去，故 x = 3。

7. (c) 化簡 $\log 8 \div \log 2 + \log_5 25$。

答案：$\log 8 \div \log 2 = \log_2 8 = 3$；$\log_5 25 = 2$；合共 3 + 2 = 5。

8. (d) 一筆款項以每年 6% 複利增長。求最少多少個完整年頭，本金才會增至原來的兩倍。

答案：解 1.06^n = 2，n = log 2 ÷ log 1.06 = 11.90（二位小數）。11 年後只得 1.898 倍，未夠兩倍；故最少需 12 個完整年頭（1.06^12 = 2.012 倍）。

3. 數學歸納法（18 分）

證明須依次寫出基礎步驟、歸納假設及歸納步驟。

9. (a) 對命題「1 + 3 + 5 + ⋯ + (2n − 1) = n^2」，寫出 n = 1 的基礎步驟。

答案：當 n = 1，左邊只有第一項 2(1) − 1 = 1，右邊 = 1^2 = 1，左邊等於右邊，命題對 n = 1 成立。

10. (b) 承 (a)，假設命題對 n = k 成立，寫出推導至 n = k + 1 的步驟。

答案：假設 1 + 3 + ⋯ + (2k − 1) = k^2。則加到第 k + 1 項時：左邊 = k^2 + [2(k + 1) − 1] = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2，正是 n = k + 1 時的右邊，故命題對 n = k + 1 亦成立；由歸納法原理，命題對所有正整數 n 成立。

11. (c) 用公式驗證 1 + 3 + 5 + ⋯ + 19 之和。

答案：末項 2n − 1 = 19，n = 10；和 = 10^2 = 100。

12. (d) 求 1 + 3 + 5 + ⋯ + 99 之和。

答案：2n − 1 = 99，n = 50；和 = 50^2 = 2500。

4. 數列與求和（16 分）

無限等比數列求和只適用於公比的絕對值小於 1。

13. (a) 等差數列首項為 5，公差為 4。求第 12 項。

答案：$a_{12} = 5 + (12 - 1) \times 4 = 5 + 44 = 49$。

14. (b) 承 (a)，求該數列首 12 項之和。

答案：$S_{12} = 12 \div 2 \times (5 + 49) = 6 \times 54 = 324$。

15. (c) 等比數列首項為 3，公比為 2。求首 8 項之和。

答案：$S_8 = 3 \times (2^8 - 1) \div (2 - 1) = 3 \times 255 = 765$。

16. (d) 無限等比數列首項為 8，公比為 1/4。求其無限項之和（二位小數）。

答案：因 |1/4| 小於 1，$S_\infty = 8 \div (1 - 1/4) = 8 \div 0.75 = 32/3 = 10.67$。

5. 函數圖像變換（16 分）

左右平移改 x，上下平移改整個函數值。

17. (a) y = f(x) 的圖像向右平移 3 單位、再向上平移 2 單位，寫出新函數。

答案：向右平移 3 單位即把 x 換成 x − 3；向上平移 2 單位即在函數值加 2，故新函數為 y = f(x − 3) + 2。

18. (b) 承 (a)，若原圖像為 y = x^2，求新圖像的頂點坐標。

答案：y = (x − 3)^2 + 2，頂點為 (3, 2)。

19. (c) y = f(x) 的圖像先沿 y 軸方向伸展為原來的 2 倍，再沿 x 軸反射，寫出新函數。

答案：沿 y 軸伸展 2 倍得 y = 2f(x)；沿 x 軸反射得 y = −2f(x)。

20. (d) y = 2^x 的圖像向左平移 2 單位後，與 y 軸相交於哪一點？

答案：新函數 y = 2^(x + 2)；令 x = 0，y = 2^2 = 4，交點為 (0, 4)。

6. 應用題建模（16 分）

建模須寫出定義域，(d) 取最接近的千位。

21. (a) 一長方形周界為 40 m，設闊為 x m。把面積 A（m²）表示為 x 的函數，並寫出定義域。

答案：長 + 闊 = 20，故長 = 20 − x；A = x(20 − x) = 20x − x^2，其中 x 介乎 0 與 20 之間。

22. (b) 承 (a)，求該長方形可能的最大面積。

答案：A = −(x − 10)^2 + 100，故 x = 10 時 A 最大，最大面積為 100 m²（此時為 10 m × 10 m 的正方形）。

23. (c) 一球形氣球的半徑由 3 cm 吹脹至 6 cm。求體積增為原來的多少倍。

答案：球體體積與半徑三次方成正比，倍數 = (6 ÷ 3)^3 = 2^3 = 8，即增為原來的 8 倍。

24. (d) 某城市人口模型為 P(t) = 500 000 × 1.02^t，t 為年數。求 t = 10 時的人口（取最接近的千位）。

答案：1.02^10 = 1.21899（五位小數）；P(10) = 500 000 × 1.21899 = 609 497，取最接近千位為 609 000。

TutorZone 中四數學（延伸部分單元一）練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。