中四数学延伸部分单元二练习卷（第一份）｜三角恒等式、对数方程、导数、积分、矩阵、向量

练习卷 · 高中数学延伸部分

中四数学延伸部分单元二（M2）练习卷（第一份），按香港高中数学延伸课程编排，适合校内测验及文凭试备试，涵盖三角恒等式与复角公式、对数与指数方程、极限与求导技巧、定积分与曲线下面积、矩阵行列式与逆矩阵解方程组，以及向量长度、内积与位移应用，每题附完整答案及步骤。

1. 三角恒等式与复角公式（16 分）

第二象限的余弦取负值；准确值以根式表示。

#	Question	Answer and marking notes
1	(a) 已知 $\sin\theta = 3/5$，且 θ 位于第二象限，求 $\cos\theta$。	$\cos^2\theta = 1 - 9/25 = 16/25$，故 $\cos\theta = \pm 4/5$；第二象限的余弦为负，所以 $\cos\theta = -4/5$。
2	(b) 用复角公式求 $\sin 75^\circ$ 的准确值。	$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = (\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2)(1/2) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4 \approx 0.9659$。
3	(c) 化简 sin 2x cos x + cos 2x sin x。	由复角公式 $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$，取 $A = 2x$、$B = x$，得 $\sin 3x$。
4	(d) 解 $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$，其中 $0^\circ \leqslant x \leqslant 360^\circ$。	设 $u = \sin x$，得 $2u^2 - u - 1 = 0$，$(2u + 1)(u - 1) = 0$，$u = -1/2$ 或 $u = 1$。$\sin x = 1$ 得 $x = 90^\circ$；$\sin x = -1/2$ 得 $x = 210^\circ$ 或 330°。故 $x = 90^\circ$、210°、330°。

2. 对数与指数方程（16 分）

解对数方程后须检查定义域；(b) 答案取三位小数。

#	Question	Answer and marking notes
5	(a) 化简 $\log_2 48 - \log_2 3$。	$\log_2 48 - \log_2 3 = \log_2 (48 \div 3) = \log_2 16 = 4$。
6	(b) 解 e^(2x) − 5e^x + 6 = 0（答案取三位小数）。	设 $u = e^x$，得 $u^2 - 5u + 6 = 0$，$(u - 2)(u - 3) = 0$，$u = 2$ 或 3。故 $x = \ln 2 \approx 0.693$ 或 $x = \ln 3 \approx 1.099$。
7	(c) 解 3^(2x − 1) = 27。	$27 = 3^3$，故 $2x - 1 = 3$，$x = 2$。
8	(d) 解 $\ln x + \ln(x - 3) = \ln 10$。	合并得 $\ln[x(x - 3)] = \ln 10$，故 $x^2 - 3x - 10 = 0$，$(x - 5)(x + 2) = 0$，$x = 5$ 或 -2。因 x 与 $x - 3$ 均须为正，$x = -2$ 舍去，故 $x = 5$。

3. 极限与导数（18 分）

因式分解后才可约去分母；(b) 须用乘积法则。

#	Question	Answer and marking notes
9	(a) 求 $\lim_{x\to 3} (x^2 - 9)/(x - 3)$。	$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$，约去 $(x - 3)$ 后得 $x + 3$；代入 $x = 3$ 得 6。
10	(b) 求 $d/dx\ (3x^2 \ln x)$。	用乘积法则：$d/dx\ (3x^2 \ln x) = 6x \cdot \ln x + 3x^2 \cdot (1/x) = 6x \ln x + 3x$。

#	Question	Answer and marking notes
11	(c) 求曲线 y = x³ − 3x 在 x = 1 处的切线斜率。	dy/dx = 3x² − 3；代入 x = 1 得 3 − 3 = 0，即该处切线为水平线。
12	(d) 设 y = (2x + 1)^5，求 dy/dx 在 x = 0 的值。	dy/dx = 5(2x + 1)^4 × 2 = 10(2x + 1)^4；代入 x = 0 得 10 × 1 = 10。

4. 积分与面积（16 分）

定积分须先写出原函数；(c) 用代换 u = x²。

#	Question	Answer and marking notes
13	(a) 求 ∫ 6x dx。	∫ 6x dx = 3x² + C。
14	(b) 求 ∫₁ ² (2x + 1) dx。	原函数为 x² + x；代入上下限得 (4 + 2) − (1 + 1) = 6 − 2 = 4。
15	(c) 求 ∫₀ ¹ x e^(x²) dx（答案取三位小数）。	设 u = x²，du = 2x dx，故积分 = (1/2) ∫₀ ¹ e^u du = (1/2)(e − 1) ≈ (1/2)(1.7183) ≈ 0.859。
16	(d) 求曲线 y = x²、x 轴、直线 x = 0 与 x = 3 所围成的面积。	面积 = ∫₀ ³ x² dx = [x³/3]₀ ³ = 27/3 = 9 平方单位。

5. 矩阵与行列式（18 分）

逆矩阵 = (1/det A) 乘以余子式矩阵；(c) 可用代入验算。

#	Question	Answer and marking notes
17	(a) 设 A = [[3, 4], [1, 2]]，求 det A。	det A = 3 × 2 − 4 × 1 = 6 − 4 = 2。
18	(b) 承 (a)，求 A 的逆矩阵。	A⁻¹ = (1/2)[[2, −4], [−1, 3]]。
19	(c) 用逆矩阵解方程组 3x + 4y = 10、x + 2y = 4。	写成 A·[x, y] = [10, 4]；[x, y] = A⁻¹[10, 4] = (1/2)[20 − 16, −10 + 12] = (1/2)[4, 2] = [2, 1]。故 x = 2、y = 1（代回 3(2) + 4(1) = 10 正确）。
20	(d) 设 B = [[1, 2], [3, 4]]，求 B²。	B² = [[1×1 + 2×3, 1×2 + 2×4], [3×1 + 4×3, 3×2 + 4×4]] = [[7, 10], [15, 22]]。

6. 向量与应用（16 分）

夹角用 cos θ = (a·b)/(\|a\|\|b\|)；(d) 先求单位向量。

#	Question	Answer and marking notes
21	(a) 设 a = (3, 4)，求 |a|。	|a| = √(3² + 4²) = √25 = 5。
22	(b) 设 b = (1, −2)，求 a·b。	a·b = 3 × 1 + 4 × (−2) = 3 − 8 = −5。
23	(c) 承 (a) 及 (b)，求 a 与 b 的夹角（取一位小数）。	|b| = √5 ≈ 2.2361；cos θ = −5 ÷ (5 × 2.2361) = −0.4472，θ ≈ 116.6°。

#	Question	Answer and marking notes
24	(d) 点 A 的坐标为 (1, 2)，由 A 沿向量 (4, 3) 的方向移动 10 单位至点 P，求 P 的坐标。	方向 (4, 3) 的长度为 5，单位向量为 (4/5, 3/5)；移动 10 单位即乘 10 得位移 (8, 6)。P = (1 + 8, 2 + 6) = (9, 8)。