中四數學延伸部分單元二練習卷

中四　數學（延伸部分單元二）　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

1. 三角恆等式與複角公式（16 分）

第二象限的餘弦取負值；準確值以根式表示。

1. (a) 已知 $\sin\theta = 3/5$，且 θ 位於第二象限，求 $\cos\theta$。

答案：$\cos^2\theta = 1 - 9/25 = 16/25$，故 $\cos\theta = \pm 4/5$；第二象限的餘弦為負，所以 $\cos\theta = -4/5$。

2. (b) 用複角公式求 $\sin 75^\circ$ 的準確值。

答案：$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = (\sqrt{2}/2)(\sqrt{3}/2) + (\sqrt{2}/2)(1/2) = (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4 \approx 0.9659$。

3. (c) 化簡 $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$。

答案：由複角公式 $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$，取 $A = 2x$、$B = x$，得 $\sin 3x$。

4. (d) 解 $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$，其中 $0^\circ \leqslant x \leqslant 360^\circ$。

答案：設 $u = \sin x$，得 $2u^2 - u - 1 = 0$，$(2u + 1)(u - 1) = 0$，$u = -1/2$ 或 $u = 1$。$\sin x = 1$ 得 $x = 90^\circ$；$\sin x = -1/2$ 得 $x = 210^\circ$ 或 330°。故 $x = 90^\circ$、210°、330°。

2. 對數與指數方程（16 分）

解對數方程後須檢查定義域；(b) 答案取三位小數。

5. (a) 化簡 $\log_2 48 - \log_2 3$。

答案：$\log_2 48 - \log_2 3 = \log_2 (48 \div 3) = \log_2 16 = 4$。

6. (b) 解 $e^{(2x)} - 5e^{x} + 6 = 0$（答案取三位小數）。

答案：設 $u = e^{x}$，得 $u^2 - 5u + 6 = 0$，$(u - 2)(u - 3) = 0$，$u = 2$ 或 3。故 $x = \ln 2 \approx 0.693$ 或 $x = \ln 3 \approx 1.099$。

7. (c) 解 $3^{(2x - 1)} = 27$。

答案：$27 = 3^3$，故 $2x - 1 = 3$，$x = 2$。

8. (d) 解 $\ln x + \ln(x - 3) = \ln 10$。

答案：合併得 $\ln[x(x - 3)] = \ln 10$，故 $x^2 - 3x - 10 = 0$，$(x - 5)(x + 2) = 0$，$x = 5$ 或 -2。因 x 與 $x - 3$ 均須為正，$x = -2$ 捨去，故 $x = 5$。

3. 極限與導數（18 分）

因式分解後才可約去分母；(b) 須用乘積法則。

9. (a) 求 $\lim_{x \to 3} (x^2 - 9)/(x - 3)$。

答案：$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$，約去 $(x - 3)$ 後得 $x + 3$；代入 $x = 3$ 得 6。

10. (b) 求 d/dx (3x² ln x)。

答案：用乘積法則：d/dx (3x² ln x) = 6x · ln x + 3x² · (1/x) = 6x ln x + 3x。

11. (c) 求曲線 y = x³ − 3x 在 x = 1 處的切線斜率。

答案：dy/dx = 3x² − 3；代入 x = 1 得 3 − 3 = 0，即該處切線為水平線。

12. (d) 設 y = (2x + 1)^5，求 dy/dx 在 x = 0 的值。

答案：dy/dx = 5(2x + 1)^4 × 2 = 10(2x + 1)^4；代入 x = 0 得 10 × 1 = 10。

4. 積分與面積（16 分）

定積分須先寫出原函數；(c) 用代換 u = x²。

13. (a) 求 ∫ 6x dx。

答案：∫ 6x dx = 3x² + C。

14. (b) 求 $\int_1^2 (2x+1)\,dx$。

答案：原函數為 x² + x；代入上下限得 (4 + 2) − (1 + 1) = 6 − 2 = 4。

15. (c) 求 $\int_0^1 x\,e^{(x^2)}\,dx$（答案取三位小數）。

答案：設 u = x²，du = 2x dx，故積分 = (1/2) $\int_0^1 e^u\,du$ = (1/2)(e − 1) ≈ (1/2)(1.7183) ≈ 0.859。

16. (d) 求曲線 y = x²、x 軸、直線 x = 0 與 x = 3 所圍成的面積。

答案：面積 = $\int_0^3 x^2\,dx = [x^3/3]_0^3 = 27/3 = 9$ 平方單位。

5. 矩陣與行列式（18 分）

逆矩陣 = (1/det A) 乘以餘子式矩陣；(c) 可用代入驗算。

17. (a) 設 A = [[3, 4], [1, 2]]，求 det A。

答案：det A = 3 × 2 − 4 × 1 = 6 − 4 = 2。

18. (b) 承 (a)，求 A 的逆矩陣。

答案：$A^{-1} = (1/2)[[2, -4], [-1, 3]]$。

19. (c) 用逆矩陣解方程組 3x + 4y = 10、x + 2y = 4。

答案：寫成 A · [x, y] = [10, 4]；[x, y] = A^{-1}[10, 4] = (1/2)[20 − 16, −10 + 12] = (1/2)[4, 2] = [2, 1]。故 x = 2、y = 1（代回 3(2) + 4(1) = 10 正確）。

20. (d) 設 B = [[1, 2], [3, 4]]，求 B²。

答案：B^2 = [[1×1 + 2×3, 1×2 + 2×4], [3×1 + 4×3, 3×2 + 4×4]] = [[7, 10], [15, 22]]。

6. 向量與應用（16 分）

夾角用 cos θ = (a · b)/(|a||b|)；(d) 先求單位向量。

21. (a) 設 a = (3, 4)，求 |a|。

答案：|a| = √(3² + 4²) = √25 = 5。

22. (b) 設 $\mathbf{b} = (1, -2)$，求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$。

答案：$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \times 1 + 4 \times (-2) = 3 - 8 = -5$。

23. (c) 承 (a) 及 (b)，求 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 的夾角（取一位小數）。

答案：$|\mathbf{b}| = \sqrt{5} \approx 2.2361$；$\cos\theta = -5 \div (5 \times 2.2361) = -0.4472$，$\theta \approx 116.6^\circ$。

24. (d) 點 A 的坐標為 (1, 2)，由 A 沿向量 (4, 3) 的方向移動 10 單位至點 P，求 P 的坐標。

答案：方向 (4, 3) 的長度為 5，單位向量為 (4/5, 3/5)；移動 10 單位即乘 10 得位移 (8, 6)。$P = (1 + 8, 2 + 6) = (9, 8)$。

TutorZone 中四數學（延伸部分單元二）練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。