中四数学练习卷：二次方程与判别式、二次函数与图像变换、指数与对数方程、三角学（余弦公式与面积）、坐标几何（圆与直线）、统计与概率（100 分）

练习卷 · 数学 · 中四

中四数学练习卷：6 题 24 部分共 100 分、时限 75 分钟，涵盖二次方程与判别式、二次函数配方与图像变换、指数与对数方程、余弦公式与三角形面积、圆与直线的坐标几何、统计量与概率计算，全部附完整答案，适合中四学生作校内试及 DSE 备试之用。

第 1 题 – 二次方程与判别式（16 分）

考虑二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$（$a \neq 0$），其判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$。$\Delta > 0$ 时有两个相异实根，$\Delta = 0$ 时有重根，Δ 小于 0 时无实根。若两根为 α 与 β，则 $\alpha + \beta = -b/a$、$\alpha\beta = c/a$。

#	Question	Answer and marking notes
1	解方程 $2x^2 - 7x + 3 = 0$，并写出判别式的值。	$\Delta = (-7)^2 - 4(2)(3) = 49 - 24 = 25$。因式分解 $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)(x - 3)$，故 $x = 0.5$ 或 $x = 3$。
2	若方程 $x^2 - 6x + k = 0$ 有重根（两个相等实根），求 k 的值及该重根。	重根条件为 $\Delta = 0$：$(-6)^2 - 4(1)(k) = 36 - 4k = 0$，得 $k = 9$。此时方程为 $(x - 3)^2 = 0$，重根 $x = 3$。
3	对方程 $3x^2 + 5x - 2 = 0$，求判别式、两根的性质，以及两根之和与两根之积。	$\Delta = 5^2 - 4(3)(-2) = 25 + 24 = 49 > 0$，故有两个相异实根。两根之和 $= -5/3$，两根之积 $= -2/3$。
4	设 α、β 为 $2x^2 - 8x + 5 = 0$ 的两根，求 $\alpha + \beta$、$\alpha\beta$ 及 $\alpha^2 + \beta^2$。	$\alpha + \beta = 8/2 = 4$，$\alpha\beta = 5/2 = 2.5$。$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 16 - 5 = 11$。

第 2 题 – 二次函数与图像变换（16 分）

函数 $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$ 的图像为一抛物线。把 $y = f(x)$ 的图像向左平移 h 个单位、向上平移 k 个单位，所得图像的方程为 $y = f(x + h) + k$。

#	Question	Answer and marking notes
5	以配方法把 $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$ 写成 $a(x - h)^2 + k$ 的形式，并写出顶点坐标与对称轴。	$f(x) = 2(x^2 - 6x) + 13 = 2[(x - 3)^2 - 9] + 13 = 2(x - 3)^2 - 5$。顶点为 $(3, -5)$，对称轴为 $x = 3$。
6	把 $y = f(x)$ 的图像向左平移 2 个单位、向上平移 4 个单位，写出新图像的顶点坐标及最小值。	新函数为 $y = f(x + 2) + 4 = 2(x + 2 - 3)^2 - 5 + 4 = 2(x - 1)^2 - 9$，顶点 $(1, -9)$，因 $a = 2 > 0$，最小值为 -9。
7	函数 $y = 3 \times 2^x$ 中，求 $x = 0$、1、2 时对应的 y 值，并说明 x 每增加 1 时 y 的变化。	$x = 0$ 时 $y = 3$；$x = 1$ 时 $y = 6$；$x = 2$ 时 $y = 12$。x 每增加 1，y 乘以 2（倍增），即增长率 100%。
8	考虑 $y = -2(x + 1)^2 + 8$。写出顶点、开口方向、最大值及 y 轴截距。	顶点为 $(-1, 8)$；因 $a = -2$ 小于 0，抛物线开口向下，最大值为 8；$x = 0$ 时 $y = -2(1) + 8 = 6$，y 轴截距为 6。

第 3 题 – 指数与对数方程（16 分）

指数律：a^(m/n) = n 次方根(a^m)，a^(−n) = 1/a^n。对数律：log(xy) = log x + log y，log(x/y) = log x − log y，log x^n = n log x。解对数方程后必须检查定义域（真数 > 0）。

#	Question	Answer and marking notes
9	不用计算机，求 8^(2/3) × 4^(−1/2) 的值。	8^(2/3) = (立方根 8)² = 2² = 4；4^(−1/2) = 1/√4 = 1/2。故乘积为 4 × 0.5 = 2。
10	解方程 3^(2x − 1) = 27^(x − 2)。	27 = 3³，故 27^(x − 2) = 3^(3x − 6)。底数相同，指数相等：2x − 1 = 3x − 6，得 x = 5（验算两边均为 3^9 = 19,683）。
11	已知 log 2 = 0.3010、log 3 = 0.4771（以 10 为底），求 log 12 及 log 1.5。	log 12 = log(4 × 3) = 2 log 2 + log 3 = 2(0.3010) + 0.4771 = 1.0791。log 1.5 = log(3/2) = log 3 − log 2 = 0.4771 − 0.3010 = 0.1761。
12	解方程 $\log_2 x + \log_2(x-6) = 4$，并说明为何要剔除其中一个解。	合并得 $\log_2[x(x-6)] = 4$，即 $x(x-6) = 2^4 = 16$，$x^2 - 6x - 16 = 0$，$(x-8)(x+2) = 0$，$x = 8$ 或 $x = -2$。因真数必须为正（$x > 0$ 且 $x - 6 > 0$，即 $x > 6$），故剔除 $x = -2$，答案 $x = 8$。

第 4 题 – 三角学：余弦公式与面积（18 分）

在三角形 ABC 中，a、b、c 分别为角 A、B、C 的对边。余弦公式：$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$。正弦公式：a/sin A = b/sin B。面积 = (1/2)ab sin C。所有答案取三位有效数字。

#	Question	Answer and marking notes
13	三角形 ABC 中 a = 7 cm、b = 9 cm、C = 52°，求 c 的长度。	$c^2 = 7^2 + 9^2 - 2(7)(9)\cos 52^\circ = 49 + 81 - 126(0.61566) = 130 - 77.57 = 52.43$，c = 7.24 cm（三位有效数字）。
14	同一三角形中，求面积（cm²）。	面积 = (1/2)(7)(9) sin 52° = 31.5 × 0.78801 = 24.8 cm²（三位有效数字）。
15	另一三角形中 A = 40°、B = 65°、a = 10 cm，求 b 的长度。	由正弦公式 b/sin 65° = a/sin 40°，b = 10 × sin 65° / sin 40° = 10 × 0.90631 / 0.64279 = 14.1 cm（三位有效数字）。
16	解方程 $2\sin^2\theta - \sin\theta - 1 = 0$，其中 $0^\circ \leqslant \theta \leqslant 360^\circ$，并列出所有解。	设 $s = \sin\theta$，则 $2s^2 - s - 1 = 0$，$(2s+1)(s-1) = 0$，$s = -1/2$ 或 $s = 1$。$\sin\theta = 1$ 得 $\theta = 90^\circ$；$\sin\theta = -1/2$ 得 $\theta = 210^\circ$ 及 330°。故 $\theta = 90^\circ$、210°、330°。

第 5 题 – 坐标几何：圆与直线（17 分）

已知 A(1, 2) 与 B(7, 10)。距离公式、中点公式及以 AB 为直径的圆均需要用到。点 (x_0, y_0) 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离为 $|Ax_0 + By_0 + C| / \sqrt{(A^2 + B^2)}$。

#	Question	Answer and marking notes
17	求 AB 的长度及 AB 的中点坐标。	AB = $\sqrt{[(7-1)^2 + (10-2)^2]} = \sqrt{(36 + 64)} = \sqrt{100} = 10$。中点为 ((1 + 7)/2, (2 + 10)/2) = (4, 6)。
18	求以 AB 为直径的圆的方程。	圆心为中点 (4, 6)，半径 = AB/2 = 5。方程为 $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 25$，即 $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0$。

#	Question	Answer and marking notes
19	直线 L: 3x + 4y − 12 = 0。求 L 的斜率、与 L 垂直的直线的斜率，以及原点到 L 的距离。	L 可写成 y = −(3/4)x + 3，斜率为 −3/4；垂直线的斜率为 4/3。原点到 L 的距离 = |0 + 0 − 12| / √(3² + 4²) = 12/5 = 2.4。
20	求通过 (2, −1) 且与 L 平行的直线方程。	平行线斜率相同，设方程为 3x + 4y + k = 0。代入 (2, −1)：6 − 4 + k = 0，k = −2。故方程为 3x + 4y − 2 = 0。

第 6 题 – 统计与概率（17 分）

一组数据 4、7、7、9、13。平均数 = 总和 ÷ 个数；中位数为排序后中间的数；众数为出现最多次的数。标准差 σ = √[Σ(x − x̄)² / n]。

#	Question	Answer and marking notes
21	求该组数据的平均数、中位数及众数。	总和 = 4 + 7 + 7 + 9 + 13 = 40，平均数 = 40/5 = 8。排序后中间值为 7，故中位数 = 7；7 出现两次，众数 = 7。
22	若加入一个新数据 20，求新数据组的平均数，并说明平均数与中位数何者受影响较大。	新总和 = 40 + 20 = 60，新平均数 = 60/6 = 10。20 为离群值，平均数由 8 升至 10（改变 2），中位数由 7 变为 7（仍是中间两数 7 与 7 的平均），故平均数受影响较大。
23	数据 2、4、6、8、10 的平均数为 6，求其方差及标准差（标准差取三位小数）。	偏差平方和 = 16 + 4 + 0 + 4 + 16 = 40，方差 = 40/5 = 8，标准差 = √8 = 2.828（三位小数）。
24	袋中有 5 个红球及 3 个蓝球。随机抽出两个球（不放回），求两个都是红球的概率。	第一个为红球的概率 = 5/8；抽出一个红球后余 4 红 3 蓝，第二个仍为红球的概率 = 4/7。所求概率 = (5/8)(4/7) = 20/56 = 5/14 ≈ 0.357。