中四數學練習卷：二次方程與判別式、二次函數與圖像變換、指數與對數方程、三角學

中四　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

第 1 題 — 二次方程與判別式（16 分）

考慮二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$（$a \neq 0$），其判別式 $\Delta = b^2 - 4ac$。$\Delta > 0$ 時有兩個相異實根，$\Delta = 0$ 時有重根，Δ 小於 0 時無實根。若兩根為 α 與 β，則 $\alpha + \beta = -b/a$、$\alpha\beta = c/a$。

1. 解方程 $2x^2 - 7x + 3 = 0$，並寫出判別式的值。

答案：$\Delta = (-7)^2 - 4(2)(3) = 49 - 24 = 25$。因式分解 $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)(x - 3)$，故 $x = 0.5$ 或 $x = 3$。

2. 若方程 $x^2 - 6x + k = 0$ 有重根（兩個相等實根），求 k 的值及該重根。

答案：重根條件為 $\Delta = 0$：$(-6)^2 - 4(1)(k) = 36 - 4k = 0$，得 $k = 9$。此時方程為 $(x - 3)^2 = 0$，重根 $x = 3$。

3. 對方程 $3x^2 + 5x - 2 = 0$，求判別式、兩根的性質，以及兩根之和與兩根之積。

答案：$\Delta = 5^2 - 4(3)(-2) = 25 + 24 = 49 > 0$，故有兩個相異實根。兩根之和 $= -5/3$，兩根之積 $= -2/3$。

4. 設 α、β 為 $2x^2 - 8x + 5 = 0$ 的兩根，求 $\alpha + \beta$、$\alpha\beta$ 及 $\alpha^2 + \beta^2$。

答案：$\alpha + \beta = 8/2 = 4$，$\alpha\beta = 5/2 = 2.5$。$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 16 - 5 = 11$。

第 2 題 — 二次函數與圖像變換（16 分）

函數 $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$ 的圖像為一拋物線。把 $y = f(x)$ 的圖像向左平移 h 個單位、向上平移 k 個單位，所得圖像的方程為 $y = f(x + h) + k$。

5. 以配方法把 $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$ 寫成 $a(x - h)^2 + k$ 的形式，並寫出頂點坐標與對稱軸。

答案：$f(x) = 2(x^2 - 6x) + 13 = 2[(x - 3)^2 - 9] + 13 = 2(x - 3)^2 - 5$。頂點為 $(3, -5)$，對稱軸為 $x = 3$。

6. 把 $y = f(x)$ 的圖像向左平移 2 個單位、向上平移 4 個單位，寫出新圖像的頂點坐標及最小值。

答案：新函數為 $y = f(x + 2) + 4 = 2(x + 2 - 3)^2 - 5 + 4 = 2(x - 1)^2 - 9$，頂點 $(1, -9)$，因 $a = 2 > 0$，最小值為 -9。

7. 函數 $y = 3 \times 2^x$ 中，求 $x = 0$、1、2 時對應的 y 值，並說明 x 每增加 1 時 y 的變化。

答案：$x = 0$ 時 $y = 3$；$x = 1$ 時 $y = 6$；$x = 2$ 時 $y = 12$。x 每增加 1，y 乘以 2（倍增），即增長率 100%。

8. 考慮 $y = -2(x + 1)^2 + 8$。寫出頂點、開口方向、最大值及 y 軸截距。

答案：頂點為 $(-1, 8)$；因 $a = -2$ 小於 0，拋物線開口向下，最大值為 8；$x = 0$ 時 $y = -2(1) + 8 = 6$，y 軸截距為 6。

第 3 題 — 指數與對數方程（16 分）

指數律：a^(m/n) = n 次方根(a^m)，a^(−n) = 1/a^n。對數律：log(xy) = log x + log y，log(x/y) = log x − log y，log x^n = n log x。解對數方程後必須檢查定義域（真數 > 0）。

9. 不用計算機，求 8^(2/3) × 4^(−1/2) 的值。
答案：8^(2/3) = (立方根 8)² = 2² = 4；4^(−1/2) = 1/√4 = 1/2。故乘積為 4 × 0.5 = 2。

10. 解方程 3^(2x − 1) = 27^(x − 2)。
答案：27 = 3³，故 27^(x − 2) = 3^(3x − 6)。底數相同，指數相等：2x − 1 = 3x − 6，得 x = 5（驗算兩邊均為 3^9 = 19,683）。

11. 已知 log 2 = 0.3010、log 3 = 0.4771（以 10 為底），求 log 12 及 log 1.5。
答案：log 12 = log(4 × 3) = 2 log 2 + log 3 = 2(0.3010) + 0.4771 = 1.0791。log 1.5 = log(3/2) = log 3 − log 2 = 0.4771 − 0.3010 = 0.1761。

12. 解方程 $\log_2 x + \log_2 (x - 6) = 4$，並說明為何要剔除其中一個解。
答案：合併得 $\log_2 [x(x - 6)] = 4$，即 $x(x - 6) = 2^4 = 16$，$x^2 - 6x - 16 = 0$，$(x - 8)(x + 2) = 0$，x = 8 或 x = −2。因真數必須為正（x > 0 且 x − 6 > 0，即 x > 6），故剔除 x = −2，答案 x = 8。

第 4 題 — 三角學：餘弦公式與面積（18 分）

在三角形 ABC 中，a、b、c 分別為角 A、B、C 的對邊。餘弦公式：$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$。正弦公式：a/sin A = b/sin B。面積 = (1/2)ab sin C。所有答案取三位有效數字。

13. 三角形 ABC 中 a = 7 cm、b = 9 cm、C = 52°，求 c 的長度。
答案：$c^2 = 7^2 + 9^2 - 2(7)(9)\cos 52^\circ = 49 + 81 - 126(0.61566) = 130 - 77.57 = 52.43$，c = 7.24 cm（三位有效數字）。

14. 同一三角形中，求面積（cm²）。
答案：面積 = (1/2)(7)(9) sin 52° = 31.5 × 0.78801 = 24.8 cm²（三位有效數字）。

15. 另一三角形中 A = 40°、B = 65°、a = 10 cm，求 b 的長度。
答案：由正弦公式 b/sin 65° = a/sin 40°，b = 10 × sin 65° / sin 40° = 10 × 0.90631 / 0.64279 = 14.1 cm（三位有效數字）。

16. 解方程 $2\sin^2\theta - \sin\theta - 1 = 0$，其中 $0^\circ \leqslant \theta \leqslant 360^\circ$，並列出所有解。
答案：設 s = sin θ，則 $2s^2 - s - 1 = 0$，(2s + 1)(s − 1) = 0，s = −1/2 或 s = 1。sin θ = 1 得 θ = 90°；sin θ = −1/2 得 θ = 210° 及 330°。故 θ = 90°、210°、330°。

第 5 題 — 坐標幾何：圓與直線（17 分）

已知 A(1, 2) 與 B(7, 10)。距離公式、中點公式及以 AB 為直徑的圓均需要用到。點 (x_0, y_0) 到直線 Ax + By + C = 0 的距離為 $|Ax_0 + By_0 + C| / \sqrt{(A^2 + B^2)}$。

17. 求 AB 的長度及 AB 的中點坐標。
答案：AB = $\sqrt{[(7 - 1)^2 + (10 - 2)^2]} = \sqrt{(36 + 64)} = \sqrt{100} = 10$。中點為 ((1 + 7)/2, (2 + 10)/2) = (4, 6)。

18. 求以 AB 為直徑的圓的方程。

答案：圓心為中點 $(4, 6)$，半徑 $= AB/2 = 5$。方程為 $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 25$，即 $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0$。

19. 直線 L: $3x + 4y - 12 = 0$。求 L 的斜率、與 L 垂直的直線的斜率，以及原點到 L 的距離。

答案：L 可寫成 $y = -(3/4)x + 3$，斜率為 $-3/4$；垂直線的斜率為 $4/3$。原點到 L 的距離 $= |0 + 0 - 12| / \sqrt{(3^2 + 4^2)} = 12/5 = 2.4$。

20. 求通過 $(2, -1)$ 且與 L 平行的直線方程。

答案：平行線斜率相同，設方程為 $3x + 4y + k = 0$。代入 $(2, -1)$：$6 - 4 + k = 0$，$k = -2$。故方程為 $3x + 4y - 2 = 0$。

第 6 題 — 統計與概率（17 分）

一組數據 4、7、7、9、13。平均數 = 總和 ÷ 個數；中位數為排序後中間的數；眾數為出現最多次的數。標準差 $\sigma = \sqrt{[\Sigma(x - \bar{x})^2 / n]}$。

21. 求該組數據的平均數、中位數及眾數。

答案：總和 $= 4 + 7 + 7 + 9 + 13 = 40$，平均數 $= 40/5 = 8$。排序後中間值為 7，故中位數 $= 7$；7 出現兩次，眾數 $= 7$。

22. 若加入一個新數據 20，求新數據組的平均數，並說明平均數與中位數何者受影響較大。

答案：新總和 $= 40 + 20 = 60$，新平均數 $= 60/6 = 10$。20 為離群值，平均數由 8 升至 10（改變 2），中位數由 7 變為 7（仍是中間兩數 7 與 7 的平均），故平均數受影響較大。

23. 數據 2、4、6、8、10 的平均數為 6，求其方差及標準差（標準差取三位小數）。

答案：偏差平方和 $= 16 + 4 + 0 + 4 + 16 = 40$，方差 $= 40/5 = 8$，標準差 $= \sqrt{8} = 2.828$（三位小數）。

24. 袋中有 5 個紅球及 3 個藍球。隨機抽出兩個球（不放回），求兩個都是紅球的概率。

答案：第一個為紅球的概率 $= 5/8$；抽出一個紅球後餘 4 紅 3 藍，第二個仍為紅球的概率 $= 4/7$。所求概率 $= (5/8)(4/7) = 20/56 = 5/14 \approx 0.357$。

TutorZone 中四數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。