中四數學練習卷：二次方程、函數圖像與變分

中四　數學　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 22 題

第一部分：二次方程的解法與判別式（15 分）

設 a、b、c 為實數，二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$（a 不等於 0）的判別式為 $b^2 - 4ac$。判別式為正時方程有兩個相異實根，為零時有重根，為負時無實根。求根公式為 $x = (-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}) / (2a)$。

1. 以配方法把方程 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 的左式寫成 $(x - 3)^2$ 的形式，並解該方程（答案準確至小數後兩位）。

答案：答案：$(x - 3)^2 = 5$，故 $x = 3 \pm \sqrt{5}$，即 $x \approx 5.24$ 或 $x \approx 0.76$。（評分要點：配方 1 分，正確開方 1 分，兩個答案 1 分）

2. 計算方程 $2x^2 + 5x - 3 = 0$ 的判別式，由此判斷根的性質，然後解該方程。

答案：答案：判別式 $= 5^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24 = 49$，為正且是完全平方，故有兩個相異有理根；$x = (-5 \pm 7) / 4$，即 $x = 0.5$ 或 $x = -3.0$。（評分要點：判別式 1 分，判斷根性質 1 分，兩根 1 分）

3. 已知方程 $x^2 + kx + 9 = 0$ 有重根，求 k 的所有可能值。

答案：答案：重根的條件為判別式 $k^2 - 36 = 0$，故 $k = 6$ 或 $k = -6$。（評分要點：列出判別式等於零 2 分，解得兩值各 1 分）

4. 設 α 與 β 為方程 $3x^2 - 7x + 2 = 0$ 的兩根。求 $\alpha + \beta$、$\alpha\beta$ 及 $\alpha^2 + \beta^2$ 的值（最後一項以最簡分數及小數表示）。

答案：答案：$\alpha + \beta = 7/3$，$\alpha\beta = 2/3$；$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 49/9 - 4/3 = 37/9 \approx 4.11$。（評分要點：根的和與積 2 分，平方和公式 2 分，答案 1 分）

第二部分：二次函數圖像與平移（16 分）

考慮函數 $y = -x^2 + 4x + 5$。其圖像是一條開口向下的拋物線，對稱軸為垂直線 $x = h$，頂點為 (h, k)。

5. 以配方法把 $y = -x^2 + 4x + 5$ 寫成 $y = -(x - h)^2 + k$ 的形式，並寫出頂點的坐標。

答案：答案：$y = -(x - 2)^2 + 9$，頂點為 $(2, 9)$。（評分要點：配方過程 2 分，頂點 2 分）

6. 寫出圖像的對稱軸方程，以及圖像與 y 軸的交點坐標。

答案：答案：對稱軸為 $x = 2$；當 $x = 0$ 時 $y = 5$，故交點為 $(0, 5)$。（評分要點：對稱軸 2 分，交點 2 分）

7. 求圖像與 x 軸的兩個交點，並寫出 y 大於 0 時 x 的取值範圍。

答案：答案：解 $-x^2 + 4x + 5 = 0$ 得 $x = 5$ 或 $x = -1$，交點為 $(5, 0)$ 與 $(-1, 0)$；圖像開口向下，故 y 大於 0 時 x 在 -1 與 5 之間。（評分要點：兩交點 2 分，範圍 2 分）

8. 把該圖像向右平移 3 單位，寫出新圖像對應的函數，並寫出新頂點的坐標。

答案：答案：新函數為 $y = -(x - 5)^2 + 9$，新頂點為 $(5, 9)$。（評分要點：平移方向 2 分，函數與頂點 2 分）

第三部分：聯變與反變（17 分）

設 y 隨 x 的平方正變，並隨 z 反變，即 $y = kx^2 / z$，其中 k 為非零常數。當 $x = 3$ 及 $z = 2$ 時，$y = 18$。

9. 求常數 k 的值，並寫出 y 與 x、z 之間的方程。
答案：答案：$18 = k(3^2)/2 = 4.5k$，故 $k = 4$，方程為 $y = 4x^2 / z$。（評分要點：代入數據 2 分，k 及方程 2 分）

10. 當 $x = 5$ 及 $z = 4$ 時，求 y 的值。
答案：答案：$y = 4(5^2)/4 = 4 \times 25 \div 4 = 25$。（評分要點：代入 2 分，答案 2 分）

11. 當 $y = 50$ 及 $z = 8$ 時，求 x 的值（只取正值）。
答案：答案：$50 = 4x^2/8 = x^2/2$，故 $x^2 = 100$，$x = 10$。（評分要點：化簡方程 2 分，開方 2 分，只取正值 1 分）

12. 若 x 增加 20% 而 z 減少 20%，y 會增加百分之幾？
答案：答案：x^2 變為原來的 1.44 倍，z 變為原來的 0.8 倍，故 y 變為 $1.44 \div 0.8 = 1.8$ 倍，即增加 80%。（評分要點：兩個倍數各 1 分，結論 2 分）

第四部分：二次方程的應用（18 分）

一個長方形花圃的周界為 34 米，面積為 60 平方米。設花圃的闊為 w 米，長為 $(17 - w)$ 米。

13. 以 w 表示花圃的長，並證明 w 滿足方程 $w^2 - 17w + 60 = 0$。
答案：答案：長為 $(17 - w)$ 米；由 $w(17 - w) = 60$ 得 $17w - w^2 = 60$，移項得 $w^2 - 17w + 60 = 0$。（評分要點：寫出長 2 分，方程推導 2 分）

14. 解上述方程，並寫出花圃的長和闊。
答案：答案：$w^2 - 17w + 60 = 0$ 分解為 $(w - 5)(w - 12) = 0$，故 $w = 5$ 或 $w = 12$；闊 5 米、長 12 米。（評分要點：因式分解 2 分，兩根 2 分，尺寸 1 分）

15. 圍欄每米造價 45 元，求圍繞花圃一周的費用。
答案：答案：費用 $= 34 \times 45 = 1530$ 元。（評分要點：用周界 2 分，答案 2 分）

16. 若周界不變而面積改為 72 平方米，求新的長和闊。
答案：答案：$w^2 - 17w + 72 = 0$，判別式 $= 289 - 288 = 1$，故 $w = (17 \pm 1) \div 2 = 9$ 或 8；新尺寸為 8 米 × 9 米。（評分要點：方程 2 分，判別式或分解 2 分，尺寸 1 分）

第五部分：對數與複利息（17 分）

對數律包括 $\log(ab) = \log a + \log b$ 及 $\log(a \div b) = \log a - \log b$。複利息公式為 $A = P(1 + r)^n$，其中 P 為本金、r 為每期利率、n 為期數。

17. 計算 $\log_2 16 + \log_3 (1/9)$ 的值。
答案：答案：$\log_2 16 = 4$，$\log_3 (1/9) = -2$，故總值為 2。（評分要點：每項 2 分，合計 1 分）

18. 解方程 $2^(x + 1) = 32$。
答案：答案：$32 = 2^5$，故 $x + 1 = 5$，$x = 4$。（評分要點：同底 2 分，指數相等 2 分，答案 1 分）

19. 某人存入 20000 元，年利率 5%，每年複利一次。以對數計算，最少要存多少個整年，結餘才會超過 30000 元？並求該年的結餘（準確至小數後兩位）。

答案：答案：需 $20000(1.05)^n$ 大於 30000，即 $(1.05)^n$ 大於 1.5；n 大於 $\log 1.5 \div \log 1.05 \approx 8.31$，故最少 9 整年；第 9 年結餘為 20000(1.05)^9 ≈ 31026.56 元（第 8 年只有 29549.11 元）。（評分要點：列式 2 分，取對數 2 分，n 值 2 分，結餘 1 分）

第六部分：統計量與概率（17 分）

八名學生在某次數學測驗的得分如下：12、15、15、18、20、22、23、25。

20. 求該組分數的平均數與中位數。

答案：答案：總分 = 150，平均數 = 150 ÷ 8 = 18.75；中位數 = (18 + 20) ÷ 2 = 19。（評分要點：總和 1 分，平均數 2 分，中位數 2 分）

21. 從八人中隨機抽出一人，求其得分高於平均數的概率。

答案：答案：高於 18.75 的分數有 20、22、23、25 共 4 個，概率 = 4 ÷ 8 = 0.5。（評分要點：找出 4 個 3 分，概率 3 分）

22. 若最低分 12 改為 20，求新的平均數與中位數。

答案：答案：新總分 = 150 − 12 + 20 = 158，新平均數 = 158 ÷ 8 = 19.75；排序後中間兩值為 20 與 20，中位數 = 20。（評分要點：新總分 2 分，平均數 2 分，中位數 2 分）

TutorZone 中四數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。