中四數學練習卷：三角比與應用

中四　數學　｜　時限：60 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 22 題

甲部　第 1 題：三角比定義與特殊角

全部答案須化簡，並在需要時寫出所用的三角比定義。

1. （a）在一個直角三角形中，角 θ 的對邊長 8 cm，斜邊長 17 cm。求 sin θ 與 cos θ 的值。

答案：答案：sin θ = 8/17，cos θ = 15/17。由畢氏定理，鄰邊為平方根(17² − 8²) = 15 cm，所以 cos θ = 15/17。評分：鄰邊 1 分，sin 1 分，cos 1 分，化簡為分數 1 分。

2. （b）不用計算機，求 sin 30° + cos 60° + tan 45° 的值。

答案：答案：2。sin 30° = 1/2，cos 60° = 1/2，tan 45° = 1，合計 1/2 + 1/2 + 1 = 2。評分：三個特殊角各 1 分，合計 1 分。

3. （c）已知 tan θ = 3/4 且 θ 為銳角，求 sin θ 與 cos θ 的值。

答案：答案：sin θ = 3/5，cos θ = 4/5。因 tan θ = 對邊 / 鄰邊，取對邊 3、鄰邊 4，斜邊為 5，故 sin θ = 3/5，cos θ = 4/5。評分：斜邊 1 分，兩個比值各 1 分，說明 θ 為銳角故取正值 1 分。

4. （d）求 sin² 35° + cos² 35° + tan 45° 的值。

答案：答案：2。同一個銳角的平方和 sin² θ + cos² θ 恒等於 1，而 tan 45° = 1，總和為 2。評分：平方和恒等式 2 分，tan 45° 1 分，合計 1 分。

甲部　第 2 題：仰角與實際測量

在平地上的一點 A 測得一座垂直塔頂的仰角為 28°，A 與塔底的水平距離為 60 m。

5. （a）求塔高，答案取一位小數。

答案：答案：約 31.9 m。tan 28° = 塔高 / 60，所以塔高 = 60 tan 28° = 31.9 m。評分：正確三角比 1 分，代入 1 分，數值 1 分，取一位小數 1 分。

6. （b）求由 A 到塔頂的視線距離，答案取一位小數。

答案：答案：約 68.0 m。cos 28° = 60 / 視線距離，所以視線距離 = 60 / cos 28° = 68.0 m。評分：餘弦關係 2 分，數值 1 分，單位 1 分。

7. （c）若改在塔底正前方 40 m 的 B 點觀察，求塔頂的仰角，答案取一位小數。

答案：答案：約 38.6°。tan θ = 31.9 / 40，θ = 38.6°。評分：算式 2 分，數值 1 分，取一位小數 1 分。

8. （d）比較在 A 與 B 兩點所測得的仰角，並解釋原因。

答案：答案：在 B 測得的仰角較大。塔高不變而水平距離由 60 m 減至 40 m，tan θ 為塔高除以水平距離，分母縮小令比值變大，故仰角上升。評分：指出 B 較大 2 分，連結 tan θ 與水平距離 2 分。

甲部　第 3 題：餘弦定理與三角形面積

在三角形 ABC 中，BC = 7 cm，AC = 9 cm，角 C = 42° 。

9. （a）求 AB 的長度，答案取兩位小數。

答案：答案：約 6.03 cm。由餘弦定理，$AB^2 = 7^2 + 9^2 - 2 \times 7 \times 9 \times \cos 42^\circ = 130 - 93.64 = 36.36$，故 AB = 6.03 cm。評分：正確公式 2 分，代入與計算 1 分，數值 1 分。

10. （b）求三角形 ABC 的面積，答案取一位小數。

答案：答案：約 21.1 cm^2。面積 $= 1/2 \times 7 \times 9 \times \sin 42^\circ = 21.1\ cm^2$。評分：公式 2 分，數值 1 分，單位 1 分。

11. （c）求角 A，答案取一位小數。

答案：答案：約 51.0° 。由正弦公式，$\sin A / 7 = \sin 42^\circ / 6.03$，故 $\sin A = 0.7767$，A = 51.0° 。評分：正弦公式 2 分，代入 1 分，數值 1 分。

12. （d）由此求角 B，並驗算三角形內角和。

答案：答案：B ≈ 87.0° 。180° − 42° − 51.0° = 87.0° ，三者相加為 180° ，驗算成立。評分：角 B 數值 2 分，內角和驗算 2 分。

甲部　第 4 題：方位角與位移

一艘船由港口 P 出發，先沿方位角 060° 航行 12 km，再沿方位角 150° 航行 9 km。

13. （a）求船與港口 P 的直線距離，答案取一位小數。

答案：答案：約 15.0 km。兩段位移分解為東西與南北分量：(10.39, 6.00) 加 (4.50, −7.79) = (14.89, −1.79)，距離 = 平方根$(14.89^2 + 1.79^2)$ = 15.0 km。評分：分量 2 分，平方和 1 分，數值 1 分。

14. （b）求船最終位置相對港口 P 的方位角，取最接近的度數。

答案：答案：約 097° 。$\tan \theta = 14.89 / 1.79$，東西分量為正、南北分量為負，故方位角為 097° 。評分：正切關係 1 分，象限判斷 2 分，度數 1 分。

15. （c）船實際航行了 21 km，但與港口的距離只有約 15 km。解釋兩者為何不同。

答案：答案：21 km 是路徑長度，15 km 是位移大小。兩段航程方向不同，第二段部分抵消了第一段的位移，故直線距離短於航行總長。評分：區分路徑與位移 2 分，指出方向不同 1 分，抵消概念 1 分。

16. （d）若第二段改為沿方位角 240° 航行 9 km，求最終位置與 P 的距離，取一位小數。

答案：答案：約 3.0 km。新分量為 (−7.79, −4.50)，合位移為 (2.60, 1.50)，距離 = 平方根$(2.60^2 + 1.50^2)$ = 3.0 km。評分：分量 2 分，合位移 1 分，數值 1 分。

乙部　第 5 題：三角方程

本題所有角度以度為單位，解的範圍為 0° 至 360° （包括兩端）。

17. （a）解方程 $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$，先求 $\sin x$ 的可能值。

答案：答案：$\sin x = 1$ 或 $\sin x = -1/2$。把方程分解為 $(2 \sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$，故 $\sin x = -1/2$ 或 1。評分：分解 3 分，兩個值各 1 分，說明以 $\sin x$ 為未知數 1 分。

18. （b）由此求方程在指定範圍內的所有解。

答案：答案：$x = 90^\circ$、210°、330°。$\sin x = 1$ 給出 90°；$\sin x = -1/2$ 在第三、四象限給出 210° 與 330°。評分：90° 1 分，210° 2 分，330° 2 分，答案齊全並排序 1 分。

19. （c）解方程 $\cos 2x = 0.5$，其中 $0^\circ \le x \le 360^\circ$。

答案：答案：$x = 30^\circ$、150°、210°、330°。$2x$ 在 $0^\circ \le 2x \le 720^\circ$ 內取值 60°、300°、420°、660°，各除以 2。評分：$2x$ 的四個值 3 分，除以 2 得解 3 分。

乙部　第 6 題：三角恒等式與應用

本題須寫出完整推導步驟，不可只寫結果。

20. （a）證明對於 $\sin\theta$ 不等於 0 的角 θ，$(1 - \cos^2\theta) / \sin\theta = \sin\theta$。

答案：答案：$(1 - \cos^2\theta) / \sin\theta = \sin^2\theta / \sin\theta = \sin\theta$，用了平方和恒等式 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$。評分：恒等式 2 分，因式分解 2 分，約去 $\sin\theta$ 並註明 $\sin\theta \neq 0$ 得 2 分。

21. （b）由此解方程 $(1 - \cos^2 x) / \sin x = 0.5$，其中 $0^\circ \le x \le 360^\circ$。

答案：答案：$x = 30^\circ$、150°。由（a）得 $\sin x = 0.5$，在第一、二象限給出 30° 與 150°。評分：化為 $\sin x = 0.5$ 得 2 分，兩個解各 2 分。

22. （c）說明為何 $x = 0^\circ$、180°、360° 不可能是（b）的解。

答案：答案：這三個角的正弦值為 0，令分母 $\sin x$ 為 0，原式無定義，所以不能代入；0.5 亦不等於無定義的量。評分：指出 sin 值為 0 得 2 分，分母為 0 無定義得 2 分，結論清楚得 2 分。

TutorZone 中四數學練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。