中五数学延伸部分单元一

中五　数学延伸部分单元一　|　时限：75 分钟　|　总分：100 分　|　共 24 题

第 1 题　二项式定理

回答下列各题，答案须写出计算过程。

1. 求 C(6, 3) 的值。

答案：C(6, 3) = (6 × 5 × 4) / (3 × 2 × 1) = 20。

2. 求 (1 + 2x)^6 展开式中 x^3 的系数。

答案：系数 = C(6, 3) × 2^3 = 20 × 8 = 160。

3. 求 (2 − x)^5 展开式中 x^2 的系数。

答案：系数 = C(5, 2) × 2^3 × (−1)^2 = 10 × 8 × 1 = 80。

4. 求 (x + 2/x)^4 展开式中的常数项。

答案：第 (r + 1) 项 = C(4, r) × x^(4 − r) × (2/x)^r = C(4, r) × 2^r × x^(4 − 2r)。令 4 − 2r = 0，得 r = 2。常数项 = C(4, 2) × 2^2 = 6 × 4 = 24。

第 2 题　指数与对数

解下列各方程，并在应用题中列出所用公式。

5. 解 3^(2x) = 81。

答案：3^(2x) = 3^4，故 2x = 4，x = 2。

6. 解 $\log_2 x + \log_2 (x - 2) = 3$。

答案：x(x − 2) = 2^3 = 8，即 x^2 − 2x − 8 = 0，(x − 4)(x + 2) = 0，得 x = 4 或 x = −2。由于 x > 2，故 x = −2 不合，答案 x = 4。

7. 化简 (log 27) / (log 3)。

答案：log 27 = log 3^3 = 3 log 3，故比值 = 3 log 3 / log 3 = 3。

8. 一部机器价值 $50 000，每年按 15% 折旧。求最少多少年后其价值首次低于 $20 000。

答案：价值 = 50000 × (0.85)^n < 20000，即 (0.85)^n < 0.4。取对数：n > log 0.4 / log 0.85 = 5.638。故 n = 6。核对：第 5 年值 $22 185，第 6 年值 $18 858。

第 3 题　求导法与切线

求下列各函数的导数，并回答切线一题。

9. 设 y = (3x + 1)^5，求 dy/dx。

答案：用链式法则：dy/dx = 5(3x + 1)^4 × 3 = 15(3x + 1)^4。

10. 设 y = x^2 ln x，求 dy/dx。

答案：用乘积法则：dy/dx = 2x ln x + x^2 × (1/x) = 2x ln x + x = x(1 + 2 ln x)。

11. 设 y = (2x − 1)/(x + 3)，求 dy/dx。

答案：用商法则：dy/dx = [2(x + 3) − (2x − 1)(1)] / (x + 3)^2 = 7 / (x + 3)^2。

12. 曲线 y = x^3 − 3x。求 x = 2 处的切线方程。

答案：dy/dx = 3x^2 − 3，在 x = 2 时斜率 = 12 − 3 = 9。切点 y = 8 − 6 = 2。切线：y − 2 = 9(x − 2)，即 y = 9x − 16。

第 4 题　微分应用

求驻点、极值及相关变率。

13. 曲线 y = x^3 − 6x^2 + 9x。求所有驻点，并判别其性质。

答案：dy/dx = 3x^2 − 12x + 9 = 3(x − 1)(x − 3)，令其为 0 得 x = 1 或 x = 3。y(1) = 1 − 6 + 9 = 4，y(3) = 27 − 54 + 27 = 0。d²y/dx² = 6x − 12：x = 1 时为 −6 < 0，故 (1, 4) 为极大点；x = 3 时为 6 > 0，故 (3, 0) 为极小点。

14. 用 40 m 围栏围出一个矩形区域。求可围出的最大面积。

答案：设长 x、阔 y，则 2x + 2y = 40，y = 20 − x。面积 A = x(20 − x) = 20x − x^2。dA/dx = 20 − 2x = 0，得 x = 10，y = 10，最大面积 = 10 × 10 = 100 m²。

15. 球体体积 V = (4/3)πr^3。当 r = 5 cm 且 r 以 0.2 cm/s 增加，求 dV/dt。

答案：dV/dr = 4πr^2，故 dV/dt = 4πr^2 × dr/dt = 4π(25)(0.2) = 20π ≈ 62.8 cm³/s。

16. 就曲线 y = x^3 − 6x^2 + 9x，求曲线向上凹的 x 范围。

答案：d²y/dx² = 6x − 12 > 0，得 x > 2。故曲线在 x > 2 时向上凹。

第 5 题　积分与面积

求下列积分及曲线下面积。

17. 求 ∫ (6x^2 − 4x + 3) dx。

答案：∫ (6x^2 − 4x + 3) dx = 2x^3 − 2x^2 + 3x + C。

18. 求 $\int_{1}^{2} (x^3 + 1)\,dx$ 的值。

答案：原函数为 x^4/4 + x。代入上下限：(16/4 + 2) − (1/4 + 1) = 6 − 1.25 = 4.75，即 19/4。

19. 求曲线 y = x(4 − x) 与 x 轴在 0 ⩽ x ⩽ 4 之间所围成的面积。

答案：y = 4x − x^2 在该区间非负，面积 = $\int_{0}^{4} (4x - x^2)\,dx = [2x^2 - x^3/3]_{0}^{4} = 32 - 64/3 = 32/3 \approx 10.7$。

20. 求 ∫ (2x + 1)^3 dx。

答案：∫ (2x + 1)^3 dx = (2x + 1)^4 / 8 + C。

第 6 题　二项与泊松分布

设 X 为二项随机变数，Y 为泊松随机变数。

21. 设 X ~ B(10, 0.3)。求 P(X = 3)，答案准确至三个有效数字。

答案：P(X = 3) = C(10, 3)(0.3)^3(0.7)^7 = 120 × 0.027 × 0.0823543 = 0.267。

22. 承上题，求 P(X ⩾ 1)，答案准确至三个有效数字。

答案：P(X ⩾ 1) = 1 − P(X = 0) = 1 − (0.7)^10 = 1 − 0.0282475 = 0.972。

23. 求 X 的平均值与方差。

答案：平均值 = np = 10 × 0.3 = 3；方差 = np(1 − p) = 10 × 0.3 × 0.7 = 2.1。

24. 设 Y ~ Po(4)。求 P(Y = 0) 及 P(Y ⩽ 1)，答案准确至三个有效数字。

答案：P(Y = 0) = e^(−4) = 0.0183；P(Y ⩽ 1) = e^(−4)(1 + 4) = 0.0916。

TutorZone 中五数学延伸部分单元一练习卷｜题目与文章为原创，并非任何学校或出版社的教材。