中五數學延伸部分單元一

中五　數學延伸部分單元一　｜　時限：75 分鐘　｜　總分：100 分　｜　共 24 題

第 1 題　二項式定理

回答下列各題，答案須寫出計算過程。

1. 求 C(6, 3) 的值。
答案：C(6, 3) = (6 × 5 × 4) / (3 × 2 × 1) = 20。

2. 求 (1 + 2x)^6 展開式中 x^3 的係數。
答案：係數 = C(6, 3) × 2^3 = 20 × 8 = 160。

3. 求 (2 − x)^5 展開式中 x^2 的係數。
答案：係數 = C(5, 2) × 2^3 × (−1)^2 = 10 × 8 × 1 = 80。

4. 求 (x + 2/x)^4 展開式中的常數項。
答案：第 (r + 1) 項 = C(4, r) × x^(4 − r) × (2/x)^r = C(4, r) × 2^r × x^(4 − 2r)。令 4 − 2r = 0，得 r = 2。常數項 = C(4, 2) × 2^2 = 6 × 4 = 24。

第 2 題　指數與對數

解下列各方程，並在應用題中列出所用公式。

5. 解 3^(2x) = 81。
答案：3^(2x) = 3^4，故 2x = 4，x = 2。

6. 解 $\log_2 x + \log_2 (x - 2) = 3$。
答案：x(x − 2) = 2^3 = 8，即 x^2 − 2x − 8 = 0，(x − 4)(x + 2) = 0，得 x = 4 或 x = −2。由於 x > 2，故 x = −2 不合，答案 x = 4。

7. 化簡 (log 27) / (log 3)。
答案：log 27 = log 3^3 = 3 log 3，故比值 = 3 log 3 / log 3 = 3。

8. 一部機器價值 $50 000，每年按 15% 折舊。求最少多少年後其價值首次低於 $20 000。
答案：價值 = 50000 × (0.85)^n < 20000，即 (0.85)^n < 0.4。取對數：n > log 0.4 / log 0.85 = 5.638。故 n = 6。核對：第 5 年值 $22 185，第 6 年值 $18 858。

第 3 題　求導法與切線

求下列各函數的導數，並回答切線一題。

9. 設 y = (3x + 1)^5，求 dy/dx。
答案：用鏈式法則：dy/dx = 5(3x + 1)^4 × 3 = 15(3x + 1)^4。

10. 設 $y = x^2 \ln x$，求 dy/dx。

答案：用乘積法則：$dy/dx = 2x \ln x + x^2 \times (1/x) = 2x \ln x + x = x(1 + 2 \ln x)$。

11. 設 $y = (2x - 1)/(x + 3)$，求 dy/dx。

答案：用商法則：$dy/dx = [2(x + 3) - (2x - 1)(1)] / (x + 3)^2 = 7 / (x + 3)^2$。

12. 曲線 $y = x^3 - 3x$。求 $x = 2$ 處的切線方程。

答案：$dy/dx = 3x^2 - 3$，在 $x = 2$ 時斜率 $= 12 - 3 = 9$。切點 $y = 8 - 6 = 2$。切線：$y - 2 = 9(x - 2)$，即 $y = 9x - 16$。

第 4 題　微分應用

求駐點、極值及相關變率。

13. 曲線 $y = x^3 - 6x^2 + 9x$。求所有駐點，並判別其性質。

答案：$dy/dx = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$，令其為 0 得 $x = 1$ 或 $x = 3$。$y(1) = 1 - 6 + 9 = 4$，$y(3) = 27 - 54 + 27 = 0$。$d^2y/dx^2 = 6x - 12$：$x = 1$ 時為 $-6 < 0$，故 $(1, 4)$ 為極大點；$x = 3$ 時為 $6 > 0$，故 $(3, 0)$ 為極小點。

14. 用 40 m 圍欄圍出一個矩形區域。求可圍出的最大面積。

答案：設長 x、闊 y，則 $2x + 2y = 40$，$y = 20 - x$。面積 $A = x(20 - x) = 20x - x^2$。$dA/dx = 20 - 2x = 0$，得 $x = 10$，$y = 10$，最大面積 $= 10 \times 10 = 100\ m^2$。

15. 球體體積 $V = (4/3)\pi r^3$。當 $r = 5$ cm 且 r 以 0.2 cm/s 增加，求 dV/dt。

答案：$dV/dr = 4\pi r^2$，故 $dV/dt = 4\pi r^2 \times dr/dt = 4\pi(25)(0.2) = 20\pi \approx 62.8\ cm^3/s$。

16. 就曲線 $y = x^3 - 6x^2 + 9x$，求曲線向上凹的 x 範圍。

答案：$d^2y/dx^2 = 6x - 12 > 0$，得 $x > 2$。故曲線在 $x > 2$ 時向上凹。

第 5 題　積分與面積

求下列積分及曲線下面積。

17. 求 $\int (6x^2 - 4x + 3)\,dx$。

答案：$\int (6x^2 - 4x + 3)\,dx = 2x^3 - 2x^2 + 3x + C$。

18. 求 $\int_1^2 (x^3 + 1)\,dx$ 的值。

答案：原函數為 $x^4/4 + x$。代入上下限：$(16/4 + 2) - (1/4 + 1) = 6 - 1.25 = 4.75$，即 $19/4$。

19. 求曲線 $y = x(4 - x)$ 與 x 軸在 $0 \leqslant x \leqslant 4$ 之間所圍成的面積。

答案：$y = 4x - x^2$ 在該區間非負，面積 $= \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = [2x^2 - x^3/3]_0^4 = 32 - 64/3 = 32/3 \approx 10.7$。

20. 求 $\int (2x + 1)^3\,dx$。

答案：$\int (2x + 1)^3\,dx = (2x + 1)^4 / 8 + C$。

第 6 題　二項與泊松分佈

設 X 為二項隨機變數，Y 為泊松隨機變數。

21. 設 X ~ B(10, 0.3)。求 P(X = 3)，答案準確至三個有效數字。

答案：P(X = 3) = C(10, 3)(0.3)^3(0.7)^7 = 120 × 0.027 × 0.0823543 = 0.267。

22. 承上題，求 P(X ⩾ 1)，答案準確至三個有效數字。

答案：P(X ⩾ 1) = 1 − P(X = 0) = 1 − (0.7)^10 = 1 − 0.0282475 = 0.972。

23. 求 X 的平均值與方差。

答案：平均值 = np = 10 × 0.3 = 3；方差 = np(1 − p) = 10 × 0.3 × 0.7 = 2.1。

24. 設 Y ~ Po(4)。求 P(Y = 0) 及 P(Y ⩽ 1)，答案準確至三個有效數字。

答案：P(Y = 0) = e^(−4) = 0.0183；P(Y ⩽ 1) = e^(−4)(1 + 4) = 0.0916。

TutorZone 中五數學延伸部分單元一練習卷｜題目與文章為原創，並非任何學校或出版社的教材。